



Maurizio Pistone Gerberto e gli altri

La scienza medievale
e le ipotesi sull'orientamento astronomico
della chiesa di Vezzolano

Maurizio Pistone

Gerberto e gli altri

La scienza medievale e le ipotesi sull'orientamento astronomico della chiesa di Vezzolano

*Qual è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova...*

Par XXXIII

Nel chiostro della chiesa di **Vezzolano** (Albugnano, XII – XIV sec.), in un ambiente indicato convenzionalmente come “**sala capitolare**”, vi è dal 2006 un allestimento didattico dedicato alle **proporzioni matematiche** e all'**orientamento astronomico** della chiesa. Fra le altre cose, si sostiene che l'asse della chiesa è diretto verso **il punto in cui sorge la luna** al “**lunistizio estremo superiore**”; quest'evento, a differenza del solstizio, che si verifica con regolarità ogni anno, ha una **periodicità di 18,61 anni**. È un fenomeno astronomico che da Vezzolano è **invisibile**, poiché la chiesa è in mezzo alle colline, senza visuale sull'orizzonte; quindi può essere determinato solo con **calcoli molto complessi e precisi**.

Si sostiene a questo proposito che:

- l'orientamento lunistiziale aveva un **grande valore simbolico**, poiché, mentre **Cristo** era associato al **sole**, la **luna** era la rappresentazione simbolica di **Maria**;
- il modello geometrico alla base della costruzione della chiesa di Vezzolano è il **decagono regolare** (detto anche “**poligono di Dio**”);
- l'**astrolabio** era uno strumento che permetteva non solo di fare complessi calcoli astronomici, ma anche di risolvere problemi relativi alla **progettazione delle chiese**, tra cui la costruzione di **finestre** da cui si proiettavano **raggi di luce** secondo una raffinata **simbologia**;
- infine, che le **complesse competenze astronomiche e matematiche** necessarie per elaborare questi calcoli “**erano per lo più bagaglio culturale degli esponenti del clero secolare e monastico**”.

Anche se le schede trattano prevalentemente della chiesa di Vezzolano, una simile elaborazione dovrebbe essere riscontrabile **nella maggior parte delle chiese dell'epoca**.

Le schede esposte non sono firmate, ma un pieghevole illustrativo, diffuso in occasione di un **convegno** tenuto 13 settembre 2006 sul tema “**La Luna, la Vergine e l'astronomia medievale**”, indica come promotori dell'iniziativa **Fernando Delmastro**, architetto e studioso di architettura medievale, e **Adriano Gaspani**, astronomo.

Una simile tesi propone quindi una **lettura fortemente innovativa** della storia dell'architettura religiosa medievale, avanzando argomenti e orizzonti di ricerca che fino a quel momento non erano mai stati proposti.

Purtroppo questi suggerimenti **non sembra che siano stati raccolti da altri studiosi**. Non risultano, almeno per Vezzolano, ulteriori contributi sul tema, né una lettura critica

della tesi proposta, a parte un breve articolo pubblicato da **Aldo Settia** e **Angelo Marzi** con toni decisamente negativi¹.

Ma **neppure i due autori** sembrano aver approfondito ulteriormente la questione. Le schede, e ancor di più il pieghevole citato, sono estremamente sommarie, come è da aspettarsi in quel tipo di supporto. Del convegno indicato sopra non risulta siano stati pubblicati gli atti, e non sembra che siano stati pubblicati approfondimenti da parte degli autori. Adriano Gaspani aveva già pubblicato un volume sull'**archeoastronomia**², e un libro dedicato specificatamente alle **chiese romaniche del Piemonte**³, ma in nessuno dei due si parla di Vezzolano. Vi sono numerosi articoli di Gaspani pubblicati in un **sito web**⁴ dedicato a questo e ad altri **“misteri”**, ma senza nessun cenno a Vezzolano.

Ultimamente ho inteso verificare queste e altre informazioni fornite nelle schede citate, in particolare quelle relative al **Poligono di Dio**, al **lunistizio** e all'uso dell'**astrolabio** nella progettazione delle chiese.

Senza entrare nel merito delle argomentazioni prettamente astronomiche, mi sono proposto soprattutto di verificare quali fossero le **conoscenze** disponibili all'epoca, e se queste fossero **adeguate** al compito indicato.

Nella scheda relativa al **“Poligono di Dio”** e all'**orientamento della chiesa** si citano le opere di tre autori: la **Geometria** di **Gerberto di Aurillac** (ca. 945 - 1003, dal 999 papa col nome di **Silvestro II**); **De Architectura**⁵ di **Marco Vitruvio Pollione** (80 a.C. circa - dopo il 15 a.C.); **De Limitibus Constituendis**⁶ di **Igino il Gromatico**⁷ (II - III sec. d. C.). Si ricorda ancora **Gerberto di Aurillac** nella scheda relativa all'**astrolabio**, senza però indicare un'opera specifica.

Il presente articolo non pretende di essere una trattazione sistematica della scienza medievale, ma solo la **verifica dell'attendibilità** della tesi proposta attraverso la consultazione delle opere citate. Risulta tuttavia necessario inquadrare gli studiosi e le loro opere nel **contesto generale**, con brevi notazioni su alcuni temi necessari per la comprensione dei loro obiettivi e interessi.

1 Aldo Settia e Angelo Marzi, *La «virginea» chiesa di Vezzolano, il «lunistizio» e l'irreparabile morte di un cipresso (in margine a un libro recente)*, Bollettino Storico Bibliografico Subalpino CIX (2011), pp. 215-222; ripubblicato col titolo *La luna e il cipresso* in: Aldo Settia, *Ritorni a Santa Maria di Vezzolano*, Deputazione Subalpina di Storia Patria, Torino 2013, pp. 205-212. Il “libro recente” a cui si allude nel titolo è una pubblicazione a cura del Consiglio Regionale del Piemonte e della Direzione Regionale per i Beni Culturali e Paesaggistici del Piemonte, dal titolo *Il senso del cielo / Howl* a cura di Fernando Delmastro, Clara Distefano, Adriano Gaspani, Filiberto Rotta, Radu Dragomirescu, s.i.d.

2 Adriano Gaspani, *Astronomia e antica architettura sull'arco alpino*, Priuli & Verlucca, 2003.

3 Adriano Gaspani, *Astronomia e geometria nelle antiche chiese alpine*, Priuli & Verlucca, 2000.

4 <http://www.duepassinelmistero.com/archeoastronomia.htm>. Una nuova versione del sito è consultabile all'indirizzo <http://www.duepassinelmistero2.com>.

5 Nelle schede (ma non nel pieghevole) l'opera è citata erroneamente come *De Architectura*.

6 Nelle schede e nel pieghevole l'opera è indicata erroneamente come *De Limitibus Constituendi*.

7 Le opere tramandate con questo nome sembra che siano attribuibili a due diversi autori; il primo Igino è del 1°-2° sec. d.C., l'autore dell'opera in oggetto (indicato a volte come Igino 2) dovrebbe essere posteriore.

La formazione del personale ecclesiastico e le “arti liberali”⁸

He knew nat Catoun, for his wit was rude...

Era così stupido che non conosceva neanche Catone
Geoffrey Chaucher, *The Canterbury Tales*⁹

Nel passaggio dalla tarda Antichità all’alto Medioevo si verifica una gravissima **crisi** che coinvolge non solo le strutture politiche, economiche e sociali, ma anche quelle culturali. La **memoria della scienza antica è dispersa**, e in gran parte d’Europa i **monasteri** sono gli unici depositari e promotori della cultura scritta. Ma anche lì, il quadro è di **estrema povertà**. La maggior parte dei chierici sapeva quel tanto che serviva per partecipare alla liturgia leggendo brani della Sacra Scrittura, inni e preghiere. Solo poche grandi istituzioni avevano una **biblioteca** sufficientemente fornita ed erano in grado di fornire una certa preparazione, come quello di **Fulda** in Germania, dove aveva studiato **Eginardo**, il biografo di **Carlo Magno**, di **San Martino di Tours**, dove fu abate dal 796 all’804 **Alcuino**, ma che fu distrutto dai normanni nell’853, di **Bobbio**, di cui Gerberto di Aurillac nel 982 fu nominato abate, e di **San Geraldo ad Aurillac**, dove lo stesso Gerberto era stato “oblato” e aveva avuto la sua prima educazione.

Dopo la crisi delle istituzioni scolastiche di tradizione romana, tocca ai monasteri farsi carico anche dell’**istruzione elementare**. Molte famiglie consegnano i figli ai monasteri come **oblato**, cioè “offerta”. Intorno ai sette anni questi bambini cominciano a vivere come dei monaci, e imparano a leggere e a scrivere.

Nelle **scuole romane**, l’insegnamento elementare era di tipo **grammaticale “analitico”**: i bambini imparavano a riconoscere le lettere, poi le sillabe: “*b-a ba, c-a ca...*”, poi le parole; imparavano le categorie grammaticali di base: le parti del discorso, le declinazioni, le coniugazioni... Seguivano brevissimi testi, come i **Dicta (Disticha) Catonis**, frasette di tono proverbiale, che davano elementari suggerimenti morali:

*Virtutem primam esse puto compescere linguam
Proximus ille deo est, qui scit ratione tacere.*

(Per me la prima virtù è tenere a freno la lingua; è simile a un dio chi sa tacere a ragione).

Questi ed altri testi del genere erano in versi, per facilitare la memorizzazione. Nel mondo monastico invece si seguiva un procedimento più “**sintetico**”¹⁰: dopo il primo apprendimento delle lettere, i bambini cominciavano a riconoscerle nel **Salterio**, il libro dei Salmi, che era la base della devozione quotidiana. L’apprendimento combinava insieme la **lettura**, la **scrittura** con la copiatura di brevissime citazioni, l’**ascolto**, poiché il Salmi erano recitati in diversi momenti della giornata, il **canto**. La lettura, con **voce cantilenante**, era accompagnata da un **dondolio ritmico** del corpo, che doveva imprimere le parole nella mente, una pratica che dalle **scuole rabbiniche** era passata a quelle cristiane e poi a quelle islamiche. Era infatti previsto che il monaco dovesse “**ruminare**” le preghiere durante ogni occupazione della giornata.

Ogni ragazzino aveva il suo **Salterio**, l’unico libro che abbia avuto una diffusione “di massa”, come l’**abecedario** in tempi a noi più recenti. Solitamente l’insegnamento terminava lì, pochissimi passavano agli studi superiori, e nella lingua dell’epoca **psalteratus** equivale a **litteratus**, cioè colui che ha imparato a leggere, non di più. Questa era anche la formazione riservata alle **fanciulle dell’alta aristocrazia**, come **Ildegarda di Bingen**, che “aveva imparato

8 Il tema è particolarmente approfondito nelle opere di Pierre Riché, tra cui: *Écoles et enseignement dans le Haut Moyen Âge*, Aubier-Montagne Paris 1979 – Picard Paris 1999; *L’enseignement au Moyen Âge*, CNRS Éditions Paris 2016.

9 *The Miller's Tale*, v. 119.

10 Pierre Riché, *L’enseignement au Moyen Âge* cit. p. 54

a leggere solo il salterio, com'è l'uso delle ragazze nobili"¹¹. Quanto alla **scrittura**, erano pochissime le occasioni di praticarla dopo il periodo scolastico.

In linea di principio, le Regole monastiche stabilivano che chi entrava nel monastero, non ne sarebbe più uscito; e i riformatori ribadivano periodicamente queste prescrizioni. Ma di fatto molti giovani, prima di pronunciare i veri voti monastici, o in certi casi anche molto prima, **uscivano per vivere nel mondo**. A volte il padre stipulava con l'abate un **contratto**, che stabiliva la libertà di scelta, da parte del ragazzo, alla fine del corso; o addirittura si prefissava un limite di tempo. A volte si specificava che l'apprendimento doveva limitarsi al **solo Salterio**, cioè all'alfabetizzazione di base, niente di più.

Quanto all'insegnamento superiore, nei monasteri si ribadiva solitamente la **condanna della cultura classica**, troppo legata al mondo pagano: tutto ciò che serviva per la salvezza dell'anima si trovava nella **Bibbia**. Ma altre voci sostenevano l'importanza di una **formazione più ampia**, sia dal punto di vista linguistico, sia scientifico. Le due tendenze si alternarono per tutto l'Alto Medioevo, e nelle fasi di "rinascimento", come l'età carolingia, e la seconda metà del X secolo, la **formazione scientifica** fu promossa nelle più prestigiose scuole ecclesiastiche.

Carlo Magno aveva avviato un ampio progetto di formazione di un **personale amministrativo** adeguato anche dal punto di vista culturale. Ma nel complesso le biblioteche, quando c'erano, erano povere. Solitamente non si andava oltre **alcune decine di libri**; solo poche istituzioni potevano vantare centinaia di manoscritti, come la biblioteca di **Bobbio**, il cui catalogo, trasmessoci dal Muratori, elenca oltre 650 titoli¹².

La cultura medievale è fatta soprattutto di **compendi, riassunti, compilazioni enciclopediche**, che spesso sono a loro volta compilazioni di compilazioni, non di rado con **false attribuzioni** a nomi noti, cosa che rendeva ancor più difficile orientarsi in una materia che sembrava sempre sfuggire dalle mani. Moltissime opere di alto valore culturale e scientifico attraversano tutto il medioevo in **pochissime copie**; quindi, pur essendo materialmente presenti, risultavano di fatto inaccessibili alla grandissima maggioranza degli studiosi. Per di più, le opere dell'antichità, che facevano riferimento ad un **contesto storico e culturale completamente estraneo** alla vita dell'uomo medievale, erano lette prevalentemente come modelli di "**buona lingua**", da cui si traevano **costrutti sintattici e vocaboli** da esibire come prova di **eleganza formale**.

La formazione del canone delle "arti liberali"

*Gram loquitur; Dia vera docet; Rhet verba colorat;
Mus canit; Ar numerat; Ge ponderat; Ast colit astra.*

Gram(matica) parla; Dia(lettica) insegna il vero; Ret(orica) colora il discorso; Mus(ica) canta; Ar(itmetica) conta; Ge(ometria) misura;
Ast(ronomia) studia gli astri

Formuletta mnemonica in esametri in uso nelle scuole¹³

Con il **crollò dell'impero carolingio**, anche il ruolo dei monasteri come formatori cominciò ad essere ridimensionato. Verso la fine del **X secolo** tocca spesso ai **vescovi** la formazione del personale ecclesiastico. È l'età della **scolastica**: questo termine, che in seguito indicherà un movimento filosofico, ora è da prendersi nel suo significato letterale, come costruzione di una **pratica didattica** organica e strutturata; quindi la definizione di un **canone** delle diverse discipline, un'analisi critica dei **fondamenti teorici** delle stesse, la realizzazione di **testi scolastici**. È stato un passaggio fondamentale

11 *...solum psalterium legere didicerat more puellarum*, cit. in P. Riché, *L'enseignement au Moyen Âge* p. 59.

12 Henry Plane, *Éclairs sur le Moyen Âge, II: L'An Mil*, pubblicazione on line sul sito https://www.apmep.fr/IMG/pdf/04_Eclairs_sur_le_Moyen-Age_II.pdf

13 Andrew Hicks *Martianus Capella and the Liberal Arts*, *The Oxford Handbook of Medieval Latin Literature*, ed. David Townsend and Ralph Hexter, 2012, p. 307

per la cultura europea, anche se la motivazione originaria era limitata alla formazione di chierici con **buona preparazione teologica e canonica**.

Per la cultura medievale, i punti di riferimento, più che gli autori dell'età classica, erano personalità che in qualche modo facevano da **snodo** fra le due epoche. Godeva di un particolare prestigio **Severino Boezio** (ca. 480-524). Pur essendo ormai uomo del Medioevo, aveva ancora accesso al patrimonio culturale antico, e ne fece una **sistematizzazione** che per secoli ebbe valore canonico. È soprattutto attraverso Boezio che alla base della formazione culturale dell'ecclesiastico si pongono le “**arti liberali**”. Questo termine, di chiara derivazione classica, indica le competenze proprie dell'**uomo “libero”**, che avendo piena cittadinanza e soprattutto **indipendenza economica**, può dedicare il suo tempo allo sviluppo della sua mente.

Le arti liberali si articolano in due gruppi:

Le arti del **trivio** sono discipline che oggi collocheremmo nell'ambito **linguistico**:

- **grammatica**, lo studio della lingua latina;
- **dialettica**, la formulazione logica delle argomentazioni;
- **retorica**, la tecnica del discorso persuasivo.

Seguono le arti del **quadrivio**¹⁴, che possiamo classificare fra le **scienze esatte**¹⁵:

- **aritmetica**;
- **musica**;
- **geometria**;
- **astronomia**.

L'opera di Boezio fu poi proseguita da **Cassiodoro**¹⁶ (ca. 485-580), che nelle *Institutiones* fornisce un vero e proprio **piano di studi** delle arti liberali; ma la sua attenzione è soprattutto rivolta alle **arti del trivio**, e alla conservazione del **patrimonio letterario dell'antichità**.

L'aritmetica, la geometria, e, di mezzo, la musica

... omnia in mensura, et numero et pondere disposuisti ...

... hai disposto tutto secondo misura, numero e peso ...

Sapienza 11, 21

Per noi l'**aritmetica** è quella che abbiamo imparato nei primi anni di scuola, quando ci hanno insegnato a **contare**, a **scrivere i numeri**, a fare le **quattro operazioni**. Nel mondo antico, invece, il punto di partenza è una **riflessione sulla natura dei numeri**.

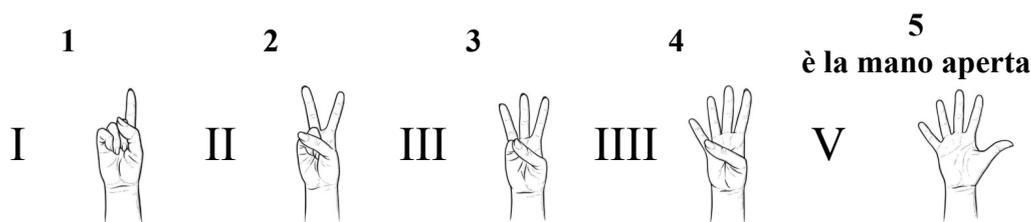
I numeri sono, in primo luogo, le **parole che usiamo per contare le cose**. In questo senso, i numeri sono come delle **etichette** che aderiscono agli oggetti, e non possono esistere senza gli oggetti. Quindi anche per pensare i numeri, abbiamo bisogno di un **supporto nella realtà**, di **oggetti** che possiamo contare. E i primi oggetti che abbiamo a disposizione sono le **dita della mano**.

Questo si vede chiaramente nel **sistema numerale romano**, che dimostra ancora la sua origine dall'atto di **numerare le cose sulle dita**:

14 Il termine, nella forma *quadrivium*, era stato introdotto da **Boezio** nel proemio della sua *Arithmetica*: Anicii Manlii Torquati Severini Boetii *De Institutione Arithmetica* Libri duo, ed. Godofredus Friedlein, Lipsiae 1867, p. 7. Trad. inglese: Michel Masi, *Boethian Number Theory, A Translation of the De Institutione Arithmetica with Introduction and Notes*, Brill | Rodopi 1983-2006.

15 Quest'ordine arriva a Gerberto, attraverso Boezio, da **Nicomaco di Gerasa** (ca. 60-120 d.C.). In Marziano Capella l'ordine è: Geometria, Aritmetica, Astronomia, Armonia.

16 Franco Cardini, *Cassiodoro il Grande. Roma, i barbari e il monachesimo*. Jaca book, 2021.



Solo in un secondo tempo si decise per il “4” il segno “**mano aperta meno uno**”: **IV** .

Il **10**, **X** , era probabilmente in origine il segno “**due mani aperte**”: $\begin{matrix} \vee \\ \wedge \end{matrix}$

50: L , è probabilmente l’adattamento di un antico segno degli **alfabeti prelatini**.

100: C , dall’iniziale di **Centum**.

500: D , cioè **la metà** del segno successivo.

1000: M , dall’iniziale di **Mille**; ma anticamente era scritto nelle forme D o CIC , da cui il precedente segno.

Dunque un sistema a **base 10**, con intercalati **multipli di 5**, in cui **ogni segno indica un numero**, e per i numeri mancanti si ricorre alla **somma** dei segni. Con le dita si conta e si fanno le più semplici operazioni. Abbiamo un **sistema numerale a base 10** proprio perché abbiamo **dieci dita**.

Con le dita è possibile anche un **altro sistema di conto**. Poiché le dita, dall’indice al mignolo, sono formate da **tre falangi**, possiamo usare il **pollice per indicare le singole falangi**:

indice: uno – due – tre
medio: quattro - cinque - sei
anulare: sette - otto – nove
mignolo: dieci – undici – dodici.

Non è un caso che il **sistema di numerazione duodecimale** per parecchio tempo abbia avuto grande importanza e abbia convissuto con l’altro.

Con le dita si possono fare solo operazioni molto semplici con piccoli numeri, ma in passato sono stati elaborati diversi sistemi che attraverso **complicate gestualità** permettevano di esprimere numeri più grandi e di fare operazioni piuttosto complesse.

Una curiosa testimonianza di queste tecniche si trova nelle **Nozze di Filologia e Mercurio** di **Marziano Capella**¹⁷. In una complicata allegoria, la figura che rappresenta l’**Aritmetica** viene presentata al dio **Giove**; allora fa dei **gesti rapidi con le dita** che significano: “**Settecento dieci sette**”. Al pubblico stupito la dea Minerva spiega che l’**Aritmetica** ha **salutato il signore degli dei** con i **valori numerici delle lettere del suo nome**¹⁸. Interpretare le lettere che compongono le parole secondo un codice numerico, e attribuire un significato simbolico a questi numeri, è una pratica che si trova in moltissime **credenze occultistiche e divinatorie**.

Pitagora, o per meglio dire la “**scuola pitagorica**” (termine col quale i greci indicavano la fase più antica della ricerca matematica), aveva elaborato una risposta diversa, che coinvolge non solo l’aritmetica in senso stretto, ma anche la **musica**, la **geometria**, l’**astronomia**. E per il nostro discorso, era importante il riferimento alla **musica**.

La preparazione musicale era necessaria all’ecclesiastico, poiché la **liturgia** era in gran parte **cantata**, ma quando si parla di **musica** nell’ambito delle Arti liberali si intende una

17 Vedi oltre n. 24.

18 *Digiti uero uirginis recursantes et quadam incomprehensae mobilitatis scaturrigine uermiculati. Quae mox ingressa septingentos decem et septem numeros complicatis in eos digitis Iouem salutabunda subrexit. Tum Philosophia... quid numero tali Arithmetica intulisset exquirat. Cui Pallas: « Proprio », inquit, « Iouem nomine salutauit. » VII 729.*

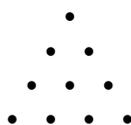
teoria musicale a base matematica. Senza voler dare un resoconto completo di questo sistema di pensiero, ma solo a scopo esemplificativo, si attribuisce tradizionalmente a **Pitagora** un'analisi delle **note musicali** viste come **proporzioni matematiche**.

Prendiamo una **corda musicale**, che emette un certo suono, diciamo, col nostro linguaggio, un **Do**. Se la dividiamo a **metà**, otteniamo il **Do** dell'**ottava superiore**. Se ne prendiamo **2/3**, otteniamo il **5° grado: Sol**. Se ne prendiamo **3/4**, otteniamo il **4° grado: Fa**. Sono quelle che ancora oggi in linguaggio musicale si chiamano le "**consonanze perfette**".

Noi oggi sappiamo che l'altezza di un suono dipende dalla **frequenza delle vibrazioni**; gli antichi non avevano modo di misurare questo valore, ma ugualmente consideravano l'**altezza del suono** come l'**inverso della lunghezza della corda**:

Nota	Lunghezza della corda	Altezza del suono (frequenza)
Fondamentale: Do	1	1
Ottava: Do'	1/2	2/1
quinto grado: Sol	2/3	3/2
quarto grado: Fa	3/4	4/3

L'umanità ha sempre conosciuto la musica, e da sempre si è percepita la differenza tra suoni che "**stanno bene insieme**" (armonici, consonanti) e suoni che "**non stanno bene insieme**" (disarmonici, dissonanti). Ora si scopriva che alla base di questa **sensibilità estetica** vi erano **rapporti matematici**. Per di più, con una regolarità affascinante. Si vedeva una successione dei **primi numeri interi: 1, 2, 3, 4**. La somma di questi valori dà **10**, un numero che si può associare ad un'idea di **perfezione, compiutezza**. Tra le caratteristiche proprie di alcuni numeri, vi è quella di poter essere rappresentati come punti che compongono **forme geometriche**, e il **10** è appunto un "**numero triangolare**":



Da queste ed altre scoperte, che facevano riconoscere nel **mondo sensibile inattese combinazioni numeriche**, nasceva l'idea che i numeri fossero la **segreta essenza del mondo**. Il mondo è stato creato da Dio "**secondo misura, numero e peso**"; la **creazione** è cominciata nel momento in cui Dio, nella sua infinita sapienza, ha **pensato**, e quindi **creato**, la **serie infinita dei numeri**¹⁹. Quindi lo studio delle scienze matematiche porta a riconoscere nel creato l'**infinita sapienza divina**.²⁰

Per **Boezio**, che in questo segue Cassiodoro, la matematica si occupa di **enti eterni, immutabili, incorporei**, divisi in **due categorie**²¹:

- una, che chiama **moltitudine** (*multitudo*), è formata da **quantità discrete**, cioè fisse e nettamente distinte l'una dall'altra; di queste si occupa l'**aritmetica** e, in via subordinata, la **musica**;

19 *Omnia quaecunque a primaeva rerum natura constructa sunt, numerorum videntur formata. Hoc enim fuit principale in animo conditoris exemplata. Inst. Arith. I, 2.*

20 A tutta la matematica medievale si può applicare il seguente giudizio riassuntivo: "The modern meaning of *arithmetic* conveys nothing of what it meant for Boethius. The difference between arithmetic (*ἀριθμητική*) and logistics (*λογιστική*) was the same for Boethius as it was for the Greeks who originally defined it. Both disciplines deal with numbers, but arithmetic designates the theory or philosophy of number; only after the Middle Ages did the term designate an elementary discipline of counting and calculation.". *Boethian Number Theory: A Translation of the De Institutione Arithmetica* with Introduction and Notes by Michael Masi Amsterdam 1983 – New York 2006, pp.11-12.

21 *Inst. Arith. I, 1.*

Ai tempi di Gerberto di Aurillac, erano fondamentali due opere di **Boezio**: l'**Aritmetica** e la **Musica**²³, che riprendevano con precisione l'insegnamento antico. Erano invece andate perdute (o forse non sono mai esistite) le opere dello stesso autore relative alla **Geometria** e all'**Astronomia**, opere che Gerberto **cercò inutilmente per tutta la vita**.

Ricordo un solo altro autore che ebbe all'epoca grande fortuna, testimoniata dall'abbondante numero di manoscritti superstiti. Col nome di **Marziano Capella**, attivo agli inizi del V secolo, ci è giunta un'opera mista di prosa e poesia, **Le nozze di Filologia e Mercurio**²⁴. Si immagina una riunione di tutte le divinità dell'Olimpo, oltre ad un fitto stuolo di figure allegoriche, per trovare una moglie a **Mercurio**, il figlio di Giove. Dopo lunghe ed elaborate discussioni, la scelta cade sulla **Filologia**, la quale accetta la proposta, e riceve come dono di nozze le **Sette Arti Liberali**, che si metteranno al suo servizio dopo essere state trasformate in divinità.

I preparativi delle nozze, e la cerimonia nuziale, occupano i primi due libri; i successivi sette sono dedicati alla presentazione delle Arti, ognuna delle quali illustra le proprie qualità e competenze. Il contenuto propriamente scientifico di queste presentazioni è molto vario; quella che prevale è quasi sempre un'**esposizione nozionistica**, chiaramente destinata ad un **apprendimento prevalentemente mnemonico**, con l'enunciazione di moltissimi punti particolari, e lunghissimi elenchi di **termini tecnici**, molto spesso in **greco**, con limitatissima e talvolta nessuna spiegazione. Non sempre si ha un'esposizione completa dei temi fondamentali della disciplina: a volte, come con la **Grammatica** e la **Dialettica**, la presentazione viene interrotta dall'assemblea divina, che dichiara di aver sentito abbastanza.

È sorprendente la presentazione della **Geometria**. L'Arte, che interpreta il proprio nome come una "descrizione della Terra", fa una trattazione prevalentemente geografica²⁵. All'inizio vi è una succinta panoramica di **geografia astronomica**, con poche nozioni elementari; in seguito, un lunghissimo **elenco delle diverse località del mondo**, sul modello dei "peripli" dei geografi greci. È naturalmente una **geografia del tutto letteraria**, presa in gran parte da **Plinio** (cioè dai commentatori di Plinio), e da altre fonti letterarie. Solo verso la fine si passa a parlare degli **enti geometrici fondamentali: punto, linea, superficie, volume**; si parla sbrigativamente degli **angoli** e delle **figure piane**, dell'**area delle figure geometriche**... Per la sua esposizione l'Arte usa il supporto abituale dello studio della geometria: una **tavoletta di legno**, in genere il retro dell'abaco, **cosparsa di polvere**, su cui si disegnavano le figure. Traccia quindi una linea, e chiede: "In che modo può essere costruito, su un **dato segmento retto**, un **triangolo equilatero**?"²⁶ L'assemblea comprende che si sta per illustrare il **primo teorema di Euclide** (che, in realtà, qui **non c'entra per niente!**), e esplode in acclamazioni verso il **grande matematico**, che ovviamente è presente. La Geometria, avendo visto "**per caso**" (*casu!*) che Euclide ha con sé **una copia dei suoi libri**, glieli **strappa di mano** (*corripuit*) e li **dona a Giove**. Con questo considera **conclusa** la sua esposizione, lodata da tutti per la sua competenza.

La parte più completa e documentata è quella relativa all'**Astronomia**, anche se siamo sempre nell'ambito di una compilazione divulgativa. L'autore non ha diretta conoscenza delle opere di **Tolomeo**, ma si basa su **commentatori antichi**, e non è esente da errori e contraddizioni, specie quando fa riferimento a **fonti diverse**. Richiamando gli studi di **Eratostene**, dà come **lunghezza del meridiano terrestre** la misura di **406.010 stadi** (VIII, 858), mentre nel libro dedicato alla **Geometria** aveva dato quella di **252.000 stadi** (VI, 596). Un po' di buona scienza emerge qua e là, come la spiegazione che **Mercurio e Venere ruotano intorno al Sole**, non intorno alla Terra²⁷; e che l'**orbita del sole è eccentrica** rispetto al centro della terra²⁸. È questo un caso in cui la scienza medievale si mostra **inferiore** alle fonti di cui pure disponeva.

23 Sono entrambe nell'ed. Friedlein citata.

24 Marziano Capella, *Le nozze di Filologia e Mercurio*, a cura di Ilaria Ramelli, Bompiani Milano 2001.

25 VI 588, nella trad. cit. a p. 417.

26 ... *lineam in abaco rectam ducens sic ait: «Quemadmodum potest super datam directam terminatam lineam trigonum aequaliterum constitui?»* VI, 724; trad. p. 495

27 *Venus uero ac Mercurius non ambiunt terram* IX, 854, p. 609.

28 ... *diuersa spatia sunt caelestis ambitus circuliue medialis, ita et diuersis centrorum signis punctisque torquentur, quo fit, ut terra solaris circuli centron non sit, sed eccentricos habeatur.* VIII, 849, p. 605.

Alla fine della rappresentazione, si annuncia anche la presenza di **Architettura** e **Medicina**, che però non sono chiamate a illustrare la loro arte, poiché si occupano di **cose mortali e terrene**, e non hanno nulla in comune con le divinità celesti²⁹.

La materia viene esposta con un linguaggio che ha dato difficoltà anche ai lettori più esperti, pieno di **espressioni astruse, insolite, contorte, vocaboli preziosi e rari, elaboratissime** e a volte **enigmatiche costruzioni allegoriche**. È forse proprio questo il motivo del successo dell'opera, che appariva come una miniera di **eleganze formali** e di **nozioni mnemoniche**.

Nell'opera **non c'è il minimo accenno alla religione cristiana**; rimane il dubbio se questa mascherata celeste sia semplicemente un espediente letterario, oppure una aperta adesione al paganesimo. Si tratta in ogni caso di un omaggio tardivo alla **tradizione culturale antica**.

Nella formazione del chierico le arti del quadrivio avevano un **valore propedeutico**. Lo studio delle scienze matematiche doveva abituare il giovane a staccarsi dal mondo materiale e padroneggiare **idee e ragionamenti astratti**, per poi riuscire ad orientarsi nella **scienza delle cose celesti**. Sicuramente il **valore strumentale** assegnato a queste discipline ne limitava fortemente le possibilità di sviluppo. Sono pochi gli intellettuali dell'epoca che appaiono autenticamente interessati ai contenuti e alle metodologie proprie delle scienze matematiche. Fra questi spicca la figura di **Gerberto di Aurillac**.

Gerberto di Aurillac³⁰: *scholasticus*, abate, vescovo, Papa

Gerbert, par vocation, est un professeur.
Pierre Riché

Gerberto di Aurillac nasce intorno al 945 da una famiglia di **condizione modesta**³¹, e già questo è un dato interessante in un'epoca in cui il ceto dirigente era costituito da poche dinastie legate da intricati vincoli di parentela. È quindi solo per le sue capacità e la sua ferma determinazione che riesce a costruirsi una **brillante carriera** non solo in campo culturale, ma anche religioso e politico. Gerberto ha relazione con tutti e tre i sovrani della **dinastia ottoniana**³², partecipa attivamente alle intricate vicende che vedono **l'estinguersi della dinastia carolingia** e l'ascesa al trono di Francia dei **robertingi**³³, infine arriva al **trono papale**.

29 ... *quoniam his mortalium rerum cura terrenorumque sollertia est nec cum aethere quicquam habent superisque confine*. IX, 891, p. 637.

30 Le principali informazioni sulla vita e sulla carriera intellettuale di Gerberto vengono dalle sue opere, in particolare dalle **Lettere**: Gerbert d'Aurillac, *Correspondance*, trad. Jean-Pierre Callu, Pierre Riché, Le belles Lettres 2008; Gerbert d'Aurillac (Silvestro II); *Lettere* (983-997), trad. Paolo Rossi Pisa 2009. Fondamentali le **Storie di Richero di Saint Remi**, che di Gerberto fu allievo. MGH Scriptorum t. XXXVIII: *Richeri Historiarum* libri III, ed. Hartmut Hoffmann, Hannover 2000. Trad. italiana: Richer di Saint Remi, *I quattro libri delle Storie (888-998)*, a cura di P. Rossi, Pisa University Press 2008. Una biografia approfondita è: **Pierre Riché**, *Gerbert d'Aurillac, le pape de l'an mil*, Librairie Artheme Fayard, 1987. Un'ampio esame su tutti gli aspetti della vita e dell'opera di Gerberto è in: **Gerberto, scienza, storia e mito**, Atti del *Gerberti symposium* (Bobbio 25-27 luglio 1983), Archivium Bobiense, Studia II, dicembre 1985. Una sintesi recente sullo stato attuale della questione gerbertiana è in: **Costantino Sigismondi** (ed.), *Doctissima Virgo. La Sapienza di Gerberto, scienziato e Papa*, Roma 2009-2011, di cui segnalo il saggio di **Marta Materni**, *Gerberto d'Aurillac e il quadrivium: testi e contesti* pp. 95-107.

31 È significativo che Gerberto venga sempre indicato non con il nome del luogo o della famiglia di origine, ma con quello dell'abbazia in cui ebbe la prima formazione.

32 **Ottone I**, 912-973, imperatore dal 962; **Ottone II**, 955-983, imperatore dal 973; **Ottone III**, 980-1002, imperatore dal 996 dopo un periodo di reggenza per la sua minore età.

33 Poi detti "**capetingi**" da **Ugo** detto il **Capeto** (987-996), conte di Parigi, incoronato re nel 987.

Gerberto ebbe la sua prima formazione nell'**abbazia di San Geraldo di Aurillac**³⁴, all'epoca un importante centro di cultura. Ben presto però lasciò Aurillac per andare in **Catalogna**, dove perfezionò i suoi studi, sotto la tutela di **Borrel**, conte di Barcellona, e di **Ató**, vescovo di Vic³⁵. Cominciò tra le altre cose un'attività che lo tenne impegnato per tutta la vita, la **ricerca di libri nelle biblioteche monastiche e cattedrali**. Si è speculato a lungo se in questo periodo "catalano" abbia avuto occasione di prendere conoscenza della **scienza araba** e delle **traduzioni arabe dei classici greci**, ma nei suoi scritti non c'è nulla di preciso sull'argomento. Nel 970 accompagnò i suoi due tutori a **Roma**, dove il papa **Giovanni XIII**, impressionato dalla sua cultura, lo raccomandò all'imperatore **Ottone I**. In quell'occasione conobbe anche il futuro imperatore **Ottone II**, con cui strinse un rapporto di reciproca stima. Nel 972 andò a **Reims** dove divenne collaboratore del vescovo **Adalberone**³⁶ e *scholasticus* (insegnante) **nella scuola della cattedrale**. **Gerberto** si dedicò con passione all'insegnamento delle arti liberali, venendo universalmente riconosciuto come uno dei più grandi intellettuali dell'epoca. Insegnava le arti del **trivio** indirizzando gli allievi alla lettura approfondita dei **classici** e fornendo lui stesso dei **modelli di scrittura elegante, puntuale ed efficace**. Insegnava l'**astronomia** con la sfera armillare, la **musica** con il monocordo, l'**aritmetica** con l'abaco. Iniziò la redazione di un manuale di **geometria**, che però lasciò incompiuto. In tutte queste attività si sforzò di superare i limiti della cultura scientifica del tempo.

Gerberto ebbe grande successo soprattutto nella pratica della **disputa**. La *disputatio* era una tipica **esercitazione didattica** dell'epoca. Due contendenti dovevano affrontarsi pubblicamente nella discussione di un tema proposto dall'insegnante o da un'altra autorità; al termine della disputa si proclamava **vincitore** colui che aveva saputo meglio argomentare. In quest'attività Gerberto eccelleva soprattutto per la sua abilità nel maneggiare le **categorie logiche aristoteliche**, in particolare la distinzione fra il **genere** e la **specie**: il primo indica una categoria di carattere generale, il secondo una categoria di significato più ristretto compresa nel primo. Rimase famosa la "**disputa di Ravenna**" (982) tenuta di fronte all'imperatore **Ottone II**, nella quale affrontò il tema della classificazione delle scienze. La questione era la collocazione della **fisica** nell'insieme delle scienze. La fisica era una **specie** compresa nel più ampio **genere** della matematica, oppure una scienza dello **stesso livello gerarchico** della matematica? Gerberto sostenne la seconda tesi, e venne dichiarato vincitore.

Una seconda *disputatio*, discussa alcuni anni dopo a **Ravenna** alla presenza dell'imperatore **Ottone II**, trattava della categoria dell'"**essere razionale**". L'uomo è una specie appartenente al genere degli "esseri razionali", che comprende anche Dio e gli Angeli? Oppure l'essere razionale è una specie del genere "uomo", poiché non tutti gli uomini sanno servirsi della ragione? Gerberto risolve la questione sostenendo che in Dio e negli angeli la razionalità in **potenza** si traduce immediatamente nell'**atto** dell'uso della ragione, invece presso gli uomini la razionalità in potenza **non sempre si traduce in atto**. In seguito Gerberto fece una dettagliata esposizione scritta della sua tesi dal titolo *De rationale et de ratione uti*³⁷.

Queste discussioni a noi possono sembrare esercizi di vuoto formalismo, ma sono il segno dello sforzo di costruire una **struttura razionale delle conoscenze** e elaborare delle **modalità rigorose di procedere** nel corso delle argomentazioni.

34 L'abbazia era stata fondata dal conte **Geraldo III d'Aurillac** (855-909) con i titoli di San Pietro e San Clemente, ed era posta direttamente sotto la tutela del papa. Dal 920 al 927 vi fu abate **Oddone**, che in seguito divenne **abate di Cluny**; fu soprattutto lui a promuovere il **culto di Geraldo**, che fin dalla morte era venerato come un santo: di qui la nuova titolazione della chiesa. L'abbazia divenne un centro di grande importanza, nota per la sua **biblioteca**, e controllava **oltre cento priorati**, da cui riceveva notevoli rendite. In seguito cominciò a decadere, i priorati divennero parrocchie, nel 1561 papa Pio IV la ridusse in **commenda**. Nel 1569 fu **occupata dai calvinisti**, che la distrussero completamente.

35 **Ató** è la grafia catalana di un personaggio indicato in altre fonti come Atton o Hatton. La grafia **Vic** è stata introdotta nel 1982 sostituendo le precedenti Vich o Vique.

36 925-989, benedettino, fu arcivescovo di Reims dal 969 e cardinale. Nel 987 incoronò re **Ugo Capeto**.

37 Testo e trad. in: Fabio Sigismondi, *Gerberto d'Aurillac, il trattato De Rationali et Ratione Uti e la Logica del X secolo*. Ateneo Pontificio Regina Apostolorum, Roma 2007.

Nel 980, nel pieno dei **conflitti per il trono di Francia**, Gerberto seguì Adalberone in Italia, dove Ottone lo nominò **abate** della prestigiosa abbazia benedettina di **Bobbio** (982) che aveva un'importante **biblioteca**. In una lettera ad Adalberone Gerberto annunciò di aver scoperto un **libro di Boezio** che trattava di **astronomia e geometria**³⁸. Gli studiosi sono incerti nell'identificazione di questo manoscritto, che probabilmente era una delle solite compilazioni un po' raffazzonate; Gerberto non fece più cenno al libro, che forse non aveva trovato interessante come all'inizio aveva sperato.

In seguito all'improvvisa **morte di Ottone II** (983), Gerberto lasciò Bobbio, pur mantenendo il titolo di **abate**, disgustato dalle continue controversie con l'aristocrazia locale che mirava ad impadronirsi dei beni del monastero. Tornato a **Reims** riprese il suo posto di *scholasticus*, e si occupò della formazione di diversi personaggi che divennero importanti intellettuali dell'epoca, ed ebbe come allievo anche **Roberto**, il figlio di **Ugo Capeto**, che in seguito divenne re di Francia come **Roberto II** detto "il Pio".

Alla **morte di Adalberone** (989) fu eletto arcivescovo di Reims **Arnolfo**, nipote di **Carlo di Lorena**, l'ultimo pretendente al trono di Francia della dinastia carolingia. Gerberto si trovò così al centro di una violenta contesa che coinvolgeva i massimi poteri del tempo. Alla fine **Arnolfo fu deposto** da un'assemblea di vescovi, e **fu eletto Gerberto**, ma la **nomina non venne accettata dal papa Giovanni XV**. Vi fu una lunghissima controversia, complicata dal continuo succedersi a Roma di papi e antipapi che restavano in carica per pochissimo tempo. Gerberto non volendo provocare uno **scisma** della Chiesa, lasciò la questione irrisolta e si recò in Germania, presso il giovanissimo **Ottone III**. Nel 998 il nuovo papa **Gregorio XV** lo nominò **vescovo di Ravenna**, risolvendo così la questione della diocesi di Reims. Alla morte di Gregorio, con l'appoggio di Ottone, Gerberto divenne lui stesso **Papa**, col nome di **Silvestro II**. La scelta del nome si richiamava a quel **Silvestro I** che era stato papa al tempo di **Costantino** e, secondo la leggenda, l'avrebbe curato dalla lebbra e battezzato³⁹. Gerberto perseguiva il progetto di una **restauratio imperii** attuata attraverso la **strettissima collaborazione tra l'impero e il papato**. L'improvvisa **morte di Ottone a soli 21 anni** (1002), seguita dalla **scomparsa di Silvestro II** (1003), pose fine a quel progetto.

Una *Geometria* incompiuta

... *regulae passim dispersae feruntur* ...
... ci sono arrivate regole disperse qua e là ...
Gerberto di Aurillac

La **geometria**, come dice anche lo stesso Gerberto, è un'arte inventata dagli egiziani per la **misurazione dei terreni**⁴⁰: quindi una **tecnica** eminentemente **pratica**. Nelle mani dei greci, essa diventa la riflessione sulle **proprietà formali di enti astratti**, e l'elaborazione di **procedure rigorose** per la dimostrazione di queste proprietà; quindi una disciplina rigorosamente **teorica**. La **geometria euclidea** porta ad un altissimo grado di elaborazione questa disciplina, ed è rigorosamente legata all'**analisi di figure**, prescindendo totalmente dalle **caratteristiche concrete** degli oggetti materiali.

38 Gerberti *Opera* cit., pp 99-101.

39 Gerberto non cita mai il *Constitutum Constantini*, la cosiddetta "donazione", che Ottone III considerava un **falso**, probabilmente in accordo con lo stesso Papa Silvestro. Florian Runschke, *Ottone III e Silvestro II - Imperatore e Papa uniti contro la donazione di Costantino*, ed. on line:
<https://www.viqeria.com/ottone-iii-silvestro-ii-imperatore-papa-contro-donazione-di-costantino/>

40 *Geometria* p. 49.

La produzione scientifica di Gerberto⁴¹ è strettamente legata alla sua **attività di insegnante**⁴², ed è fortemente condizionata dalle vicende tormentate della sua vita pubblica. La *Geometria*, che è la più importante fra le sue opere scientifiche sicuramente autentiche, **si interrompe** nel corso della trattazione del **triangolo rettangolo**, probabilmente in seguito alla **cessazione della sua attività didattica** presso la scuola della cattedrale di Reims.

Nella tradizione manoscritta la *Geometria* di Gerberto è completata da un testo, di scarsa qualità, denominato convenzionalmente **Geometria di autore incerto**, che non può essere considerato autentico⁴³.

Gerberto dedica la sua **opera più impegnativa** alla disciplina che gli appariva la più **trascurata**, per la **mancaza di opera generali** sull'argomento e la **povertà** del materiale reperibile, sparso in diversi testi frammentari e spesso, come vedremo, gravemente scorretti. Nonostante la sua incompletezza, la *Geometria* di Gerberto rappresenta il **livello massimo degli studi** sulla materia prima della diffusione delle **traduzioni** dall'arabo e dal greco, a partire dal XII secolo.⁴⁴

Le fonti

Le **fonti** a cui Gerberto poteva attingere appartengono a **due grandi filoni**:

1. Quella che convenzionalmente si indica come “**geometria sub-euclidea**”⁴⁵. Con questo termine si indicano **trattazioni sommarie della geometria classica**, che si limitano alla semplice **descrizione** di alcune figure, **senza le dimostrazioni**. Si perde quindi tutto l'**apparato logico-deduttivo** caratteristico della matematica greca.

Il termine non implica necessariamente una derivazione diretta dagli *Elementi* (στοιχεῖα) di Euclide⁴⁶, ma un riferimento allo “stato dell'arte” della tarda antichità, quale era pervenuto all'alto Medioevo attraverso riduzioni, di cui le opere di **Boezio** (o falsamente attribuite a Boezio) costituivano il *corpus* principale.

41 L'edizione di riferimento delle opere matematiche di Gerberto è: Gerberti postea Silvestri II papae *Opera Mathematica (972-1003)*, collegit... Dr. Nicolaus Bubnov..., Berolini 1899. L'opera, indicata dal curatore come *Gerberti Isagoge Geometriae* (Introduzione alla geometria) occupa le pp. 46-97.

Avrò occasione di citare anche una precedente edizione: *Œuvres de Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II...* collationées sur les manuscrits par A. Olleris, Clermont F^d - Paris 1867.

42 Marta Materni, *La Geometria Gerberti: un manuale scolastico del X secolo*, Euphrosyne, 27 (2009), pp. 364-373; online su Academia.edu.

43 Gerberti *Opera* ed. Bubnov cit., pp. 310-365. *Gerbertus enchiridion systematicum vel isagogen geometriae ad ingredientium usum componere sibi proposuit et temporum fontiumque penuriae ratione habita, quod proposuit, indefatigabili diligentia utilia quaeque undecunque colligens... miraque intelligentia ex ordine exponens tam praeclare ex parte... adimplevisse censendus est, ut a nullo certe ejusdem seculi scolastico, qui scilicet eisdem fontibus uteretur, superari potuerit... Geometria autem incerti auctoris nihil est aliud nisi propositiones miscellaneae ab auctore collectae retractatae dicendique genere expolita*. ib. n. 11.

44 Menso Folkerts, *La civiltà islamica: antiche e nuove tradizioni in matematica. La rinascita degli studi geometrici nel mondo latino*. In: Enciclopedia Treccani online, Storia della scienza (2002).

45 Su tutto questo, vedi Gillian R. Evans, *The “Sub-Euclidean” Geometry of the Earlier Middle Ages, up to the Mid-Twelfth Century*. Arch. Hist. Exact Sci. 16, 105-118 (1976). “... sub-Euclidean in the sense that it is in use among scholars who have not studied Euclid himself as their immediate source... Geometry, then, was poor stuff without the benefit of a direct study of the Euclidean *Elements*... But it is a long step from the first reading of a new textbook to the point at which it is possible to apply its teaching in new and unexplored contexts or to ask new questions about its content...”, pp. 114-117.

46 Euclide, *Tutte le opere*, a cura di Fabio Acerbi, Bompiani 2007.

2. Le opere degli **agrimensori romani**⁴⁷. I **gromatici**, detti così dal loro strumento di lavoro, la **groma**⁴⁸ (ma nell'antichità si usava più spesso il termine **limitatores**, cioè "tracciatori di confini"), erano dei **professionisti** di quella che oggi chiameremmo "**pianificazione del territorio**". Il loro compito principale era quello di tracciare le mappe dei **nuovi insediamenti**, sia nelle aree da edificare, sia nelle campagne, che venivano divise in **lotti** (*centuriae*) da assegnare ai nuovi proprietari. L'operazione partiva da due assi perpendicolari, il **cardo**, con direzione nord-sud, e il **decumanus**, con direzione est-ovest. Parallelamente a questi venivano tracciati a intervalli regolari i **confini** delle nuove proprietà, ed in questo modo si definiva anche un **reticolo di strade**. Si trattava dunque di **uomini pratici**, che avevano alcune competenze matematiche ed astronomiche, ma non erano interessati alle basi teoriche delle discipline. Sono quindi autori attraverso i quali si mantiene il senso originario della parola "**geometria**", che è appunto, in greco, "**misurazione dei terreni**"⁴⁹.

Gli enti geometrici fondamentali

Il testo comincia con l'enunciazione dei "**principi**" (*initia*) ed "**elementi**" (*elementa*) della geometria: **punto, linea, superficie, solido**, così come compaiono in **Euclide**. Ma l'esposizione segue in realtà un ordine inverso, **dal solido al punto**. Lo scopo, infatti, è quello di innalzare la mente dalle "**cose materiali**" alle "**spirituali**".

La fonte di questo ragionamento è un testo di **Sant'Agostino** sulla "**quantità**" dell'anima (*De Quantitate Animae*⁵⁰). Secondo l'uso del tempo, il testo è costruito come un **dialogo**, e un interlocutore fittizio pone la domanda: **come può esistere l'anima, se non ha dimensioni?** Risponde Agostino:

ti dimostrerò che esistono molte cose, delle quali non puoi dire che sono un nulla, eppure in esse tu non trovi le dimensioni che attribuisce all'anima⁵¹.

Quindi una riflessione sugli enti geometrici permette di comprendere l'esistenza di **entità spirituali che non hanno dimensioni perché non hanno consistenza materiale**.

Dopo aver parlato di **diverse idee astratte**, come la giustizia, la memoria, che evidentemente **non hanno dimensioni misurabili**, Agostino passa ad esaminare **alcuni enti matematici**, come la **linea**, che ha lunghezza ma non larghezza. Nel mondo le cose hanno tre dimensioni, perfino un "filo di ragno, la cosa più esile che di solito osserviamo"⁵², ha una larghezza, non è pura lunghezza. Eppure se uno pensa ad una linea, si rende conto che essa **non ha larghezza**. Poi passa a trattare di alcune figure: il **cerchio**, il **quadrato**, il **triangolo equilatero**. Dopo aver enunciato alcuni principi generali, come quello che una figura piana non può essere delimitata da meno di tre linee rette, passa a discutere quali figure siano più "**belle**" e "**perfette**". Sono, evidentemente, quelle che in cui prevalgono l'**uguaglianza**, la **simmetria**. Così il **quadrato**, formato da quattro lati uguali e da quattro angoli uguali, angoli è più perfetto del **rombo**, che ha

47 L'ed. completa di riferimento è ancora *Gromatici veteres*. Ex recensione Caroli Lachmanni (*Corpus Agrimensorum Romanorum*), Berolini 1848. Un'ed. aggiornata con traduzione italiana: *Gli antichi agrimensori*, a cura di Giacinto Libertini, Istituto di Studi Atellani, 2018.

48 La *groma* è uno strumento formato da due astine unite perpendicolarmente, dalle cui estremità pendono quattro fili a piombo. Con essa si potevano quotare otticamente linee ad angolo retto sul terreno.

49 La divaricazione tra la geometria teorica e la pratica della misurazione dei terreni è lamentata già da Cassiodoro in *Variae*, III 52,7, cit. da Ilaria Ramelli, *Introduzione* a Marziano Capella, *Le Nozze* p. LI. MGH, Cassiodori Senatoris *Variae* Recensuit Theodorus Mommsen Berolini 1894, pp. 108-109.

50 Ed. on line: testo latino www.augustinus.it/latino/grandezza_anima/index.htm; trad. italiana www.augustinus.it/italiano/grandezza_anima/index.htm.

51 ... ostendam tibi multas esse res quas non possis dicere nihil esse, nec tamen in eis invenire aliqua huiusmodi spatia, qualia in anima requiris. Aug. *De quantitate animae* 4.

52 ... si enim filum aranae in animo constituerem, quo nihil exilius solemus videre; occurrit mihi etiam in eo tamen et longitudo per se, et latitudo, et altitudo. Ib. 6

quattro lati uguali, ma gli angoli uguali solo a due a due. Le figure regolari hanno tutte un **centro**, ma **la figura più perfetta è il cerchio**, poiché tutte le linee tracciate dal centro alla circonferenza sono uguali.

Il testo di Sant'Agostino, pur trattando di alcune figure geometriche, non è diretto a **dimostrare razionalmente le loro proprietà formali**, che sono appena accennate e date come **intuitive**, ma a sottolineare la maggiore o minore **“bellezza”** e la **“perfezione”** di alcune di esse. Si tratta di un'impostazione dal forte sapore **neoplatonico**, che però dal punto di vista strettamente scientifico non è molto conclusiva.

Il procedere di Gerberto è molto più **metodico** e **didattico**, ed assai meno interessato all'esposizione di simbologie neoplatoniche⁵³. Egli parte dai **corpi solidi** che si estendono per **tre dimensioni**, e quindi possono essere **percepiti al tatto**, **“come la tavoletta su cui sto scrivendo”**⁵⁴.

Noi siamo legati all'immagine dello studioso medievale che verga le parole con l'inchiostro sulla **pergamena**. Ma questo materiale costosissimo era riservato a scritti destinati a rimanere nel tempo; per le scritture quotidiane, la corrispondenza informale, le esercitazioni scolastiche⁵⁵, o anche per la prima redazione di opere scientifiche o letterarie, si usavano, come ai tempi dell'antica Roma, **tavolette di legno** coperte da un sottile **strato di cera**, che si incidava con uno stelo appuntito. Quando il testo non serviva più, si lisciava la superficie di cera e la tavoletta poteva essere riutilizzata. La pergamena serviva per la **bella copia**.

I corpi solidi sono delimitati da **superfici** (assai opportunamente Gerberto ha scelto come esempio un oggetto con superfici piane!) che si estendono in larghezza e lunghezza, ma **non hanno spessore**. Per questo possono essere **percepiti solo con la mente**: non esiste nel mondo sensibile una superficie senza spessore. Ogni superficie è delimitata da **linee**, che hanno solo lunghezza, ma non larghezza. Infine, le linee sono delimitate da **punti**, e qui ci troviamo di fronte ad un ente che non ha dimensioni, e non è composto da parti, e quindi non **esiste realmente** se non appunto come **termine di una linea**.

Come l'unità, che è il principio di tutti i numeri ma non è essa stessa un numero⁵⁶, il punto è il principio di tutte le misure ma non è esso stesso suscettibile di misura o di dimensione... Questi tre elementi, il punto, la linea, la superficie, non possono esistere in natura senza i corpi; tuttavia lo spirito li comprende come incorporei, e come se avessero il loro essere al di fuori dei corpi. Invece il volume, come l'abbiamo definito sopra, risiede nei corpi solidi, può essere percepito con i sensi, e può essere suddiviso in ogni dimensione: in lunghezza, in larghezza e in spessore⁵⁷.

53 “... lo spirito gerbertiano dell'opera si distacca in realtà da quello dei due autori [Agostino e Boezio], mirando a costituire un manuale di autentica geometria piuttosto che un trattato di applicazione della geometria a speculazioni di tipo spirituale ...” M. Materni, op. cit., p. 8 dell'ed. on line.

54 ... *ut haec praesens, in qua scribo, tabella*. Gerberti Opera Mathematica p. 52.

55 Anche Carlo Magno, che era quasi del tutto analfabeta, si esercitava (inutilmente) a tracciare lettere su “tavolette” e foglietti. *Temptabat et scribere tabulasque et codicellos*... Eginardo, *Vita Karoli*, 25.

56 Nell'aritmetica pitagorica l'1 non è un numero, ma è la *monade*, la “singolarità” da cui deriva la “molteplicità” dei numeri.

57 *Hoc vice unitatis, quae est numerorum omnium principium, nec tamen ipsa numerus, omnium origo est mensurarum, ipsum tamen nullius mensurae aut magnitudinis capax... Sed haec, videlicet, tres: punctum, linea et superficies in rerum natura subsistere nequeunt praeter corpora, mentetamen intelliguntur incorporalia et quasi praeter corpora esse suum habentia. Soliditas vero supra diffinitin solidis manens corporibus, sensibus etiam comprehendi valet, eaque omnifariis et in longitudine ac latitudine, nec non etiam et altitudine sectionibus subjacet.* Gerberti Opera ed. Bubnov cit. p. 54. La fonte diretta è **Macrobio**, *Commentarii in Somnium Scipionis*, 1.5.5-7, che Gerberto riprende quasi alla lettera.

Le unità di misura

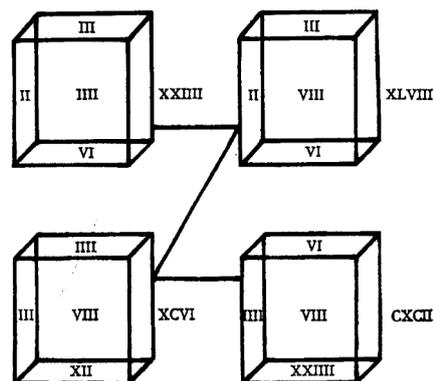
A questo punto la *Geometria* affronta un tema del tutto diverso, a cui Gerberto presta una grande attenzione, e che doveva essere canonico nel corso di studi dell'epoca: quello delle **unità di misura**. Si tratta di un tema che riporta la disciplina alla sua origine storica, cioè la scienza della **misurazione dei terreni**, ma che si intreccia con i due grandi **limiti** della scienza del tempo:

1. la difficoltà nel definire le proprietà delle figure geometriche attraverso lo studio con **metodo logico deduttivo** delle loro **caratteristiche formali**, a causa della povertà della geometria “sub-euclidea”; la soluzione sembra essere quella di misurare **concretamente** le dimensioni delle figure, e fornire una serie di **esempi numerici** per descriverne le caratteristiche.
2. La difficoltà nel maneggiare le grandezze aritmetiche con un **sistema di numerazione** rozzo come quello **romano**; la scappatoia sembra essere quella di utilizzare i vari tipi di misure tradizionali articolate in un complicatissimo sistema di **multipli e sottomultipli**.

Senza fornire tutto l'elenco delle misure, diciamo che la base della misurazione è il **pie**de, corrispondente a circa 29 dei nostri centimetri; al piede corrisponde anche una misura di superficie, il **pie**de quadrato, e una misura di volume, il **pie**de cubico.

Pensando che i suoi allievi non abbiano familiarità con quest'ultima misura, Gerberto spiega che la si può immaginare come un **oggetto** a forma di **cubo** o di **dado** fatto in cera, legno o altro materiale. Ma come si fa a rappresentare una figura tridimensionale? Gerberto, che non conosce ancora i trucchi della **prospettiva**, deve far riferimento a modelli solidi, “anche se [Calcidio] nel suo commento al Timeo di Platone è riuscito in qualche modo a **rappresentare un corpo solido su un piano**”⁵⁸! Gerberto si riferisce probabilmente alla **figura a fianco**⁵⁹, inserita, si noti, non in una trattazione geometrica, ma nella **teoria dei numeri**.

DESCRIPTIO SOLIDARUM FIGURARUM CUM NUMERIS SUIS IUXTA ARITHMETICAM DISCIPLINAM.



All'epoca il **Timeo** era l'**unica opera nota di Platone**, attraverso la traduzione parziale e il commento di **Calcidio**. Probabilmente Gerberto aveva una copia senza le figure.

Vi sono moltissimi **multipli** del piede; solo a titolo di esempio, cito il **cubito**, 1 piede e $\frac{1}{2}$; il **gradus**, 2 cubiti, ovvero 3 piedi; il **passo**, 5 piedi...

Si inserisce a questo punto anche una misura di superficie, il **laterculus** (un tipo di mattone) che misura un piede di larghezza e un piede e $\frac{11}{12}$ di piede di larghezza... Arriviamo alla **pertica**, 2 passi ovvero 10 piedi... di nuovo alcune misure di superficie, come lo **jugero**, 24 piedi per 12... la **centuria**, 200 jugeri... si torna alle misure di lunghezza, lo **stadio**, “che è la misura più usuale per le distanze da percorrere in viaggio”⁶⁰, e vale 125 passi, ovvero 625 piedi; il **miglio**, 8 stadi; la **lega** (*leuva*) 1 miglio e $\frac{1}{2}$ ovvero 12 stradi.

58 *Solidus autem est longitudine, latitudine altitudineque aequaliter distensus et quadratus, per quem solida metiuntur corpora, formam videlicet cubi vel tesserae retinens, qui in planitie quidem aequalitate non potest aperte figurari, sed vel mente intelligi, vel cera, vel ligno, aliave ejusmodi materia facile valet formari, quamvis Calcidius Timaeum Platonis exponens solidum in plano corpus figuratum utcumque descriperit. Geometria cit. p. 56.*

59 Tavola 4 del cap. XV in: Calcidio, *Commentario al «Timeo» di Platone*, a cura di Claudio Moreschini, Bompiani 2003 p. 784.

60 ... quod magis in itinerum disensionibus usuale est... ib. p. 62.

I sottomultipli del piede lineare sono: il **dito**, che ha la lunghezza di **quattro grani d'orzo**, ed è pari a **un sedicesimo del piede**; l'**uncia**, che è un dodicesimo di piede; il **palm**, $\frac{1}{4}$ di piede; il **dodrans**, $\frac{3}{4}$ di piede.

Sempre rimanendo nei sottomultipli, Gerberto introduce un'altra serie di misure, derivate dai **sistemi monetari antichi**, che servono a compensare l'enorme difficoltà del sistema numerale romano nel rappresentare i **valori frazionari**; l'**asse** romano, l'antica moneta romana in rame, qui vale semplicemente come **unità di conto**; le frazioni sono indicate prevalentemente in **dodicesimi** e sono per lo più multipli e sottomultipli dell'**uncia**, che equivale a $\frac{1}{12}$ di piede. Riappare qui la **numerazione duodecimale**.

Insomma, una selva di **misure da imparare a memoria** che dovevano essere una vera tortura per insegnanti e studenti, ma rimanevano in vita per il **peso della tradizione** e l'**autorità degli antichi agrimensori romani** e per la necessità di affrontare in **modo pratico** problemi insolubili per via **puramente teorica**.

Figure, linee, angoli

La *Geometria* torna agli argomenti propriamente teorici parlando di diversi tipi di figure. Per il momento si tratterà di **figure piane**; dei **solidi** si parlerà oltre (*sed de solidis in posterioribus*). Purtroppo il testo si fermerà prima.

Le figure sono delimitate da **linee curve o rette**. Di fatto poi Gerberto parla quasi solo di queste ultime. Le diverse figure hanno diverse regole per definire le loro caratteristiche, e soprattutto per il **calcolo dell'area**, ma queste regole **sono tramandate in modo frammentario e disordinato** (*regulae passim dispersae feruntur*⁶¹), frase che illustra **lo stato in cui si trovavano le scienze matematiche all'epoca**. Bisognerà dunque partire ordinatamente (*ordinatius*) da **poche regole semplici**, in primo luogo a proposito degli angoli, e altre utili per i **principianti** (*et alia quaedam ingredientibus*). Parla quindi delle diverse qualità di angoli: l'**angolo retto**, l'**angolo acuto**, l'**angolo ottuso**, infine quello che noi chiamiamo "**angolo piatto**", senza però mai introdurre una misura. Accenna anche agli angoli prodotti dalla confluenza di linee rette e curve: per esempio, una linea retta che taglia una circonferenza sopra o sotto il centro ecc.

Parla anche delle **rette parallele**, e di una **linea secante**; ma non sembra aver cognizione del ruolo fondante che ha il **postulato delle rette parallele** nella **geometria euclidea**.

I triangoli e il triangolo rettangolo "pitagorico"

L'ultimo argomento del testo tratta dei **triangoli**, aspetto fondamentale in tutta la geometria piana, poiché, dice Gerberto, **ogni figura delimitata da lati retti può essere divisa in triangoli**. Gerberto sa che **la somma degli angoli di un triangolo vale due angoli retti**, anche se non ne dà dimostrazione, a parte una **citazione da Boezio**⁶². Gerberto sa anche che l'**area del triangolo** è pari alla metà del prodotto della base per l'altezza, di nuovo senza dimostrazione.

A questo punto Gerberto passa al tema che occupa quasi tutta la parte finale del testo: il **triangolo rettangolo** e soprattutto il triangolo "**pitagorico**". Con questo nome indica il triangolo che ha i lati con misure **3, 4, 5**. A scopo di esercizio, egli propone **diversi**

61 ... *regulae passim dispersae feruntur, ex quibus aliquas, quas nostri attingere potuit diligentia, quae utiliores videbantur, aliquantisper ordinatius digestum aggredi tentabimus, si prius pauca de angulorum speciebus et alia quaedam ingredientibus necessaria probaverimus. Geometria cit. p. 65*

62 *Et juxta hanc rationem, ni fallor, erit intelligendum quod in categoriarum commentariis a Boetio multis movere solet scripulum: „Scimus triangulum tres interiores angulos duobus rectis angulis habere aequos.“ Geometria cit. p. 75.*

esempi, con diverse combinazioni di misure prese dal lungo elenco a cui si accennava sopra, ma sempre riferite a triangoli con le medesime proporzioni del triangolo “pitagorico”. È a proposito di questo triangolo che si enuncia il “**teorema di Pitagora**”, il quale, in questo caso, dà **risultati certi**; negli altri tipi di triangoli rettangoli, **se la regola non è verissima, è per lo meno vicina alla verità**⁶³.

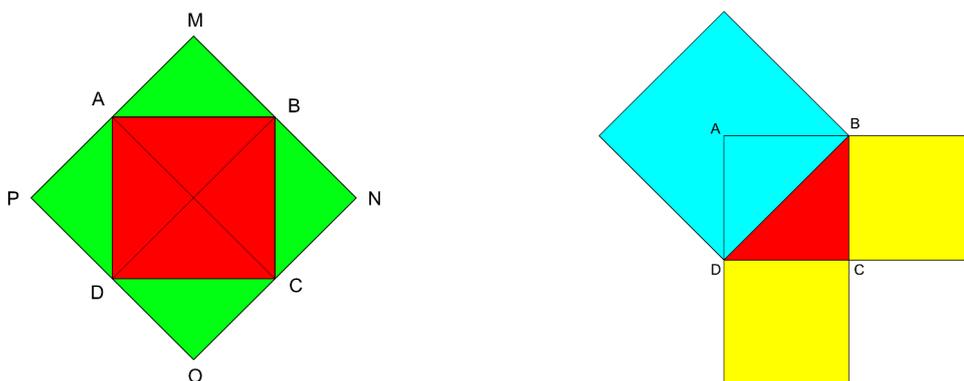
In questi passaggi si sommano due distinti problemi, che per la matematica di quel tempo sono insormontabili:

1. Gerberto non conosce la **dimostrazione formale del teorema di Pitagora**, e non sa che nella matematica greca questa dimostrazione era **puramente geometrica** e prescindeva del tutto dai **valori numerici delle misure**.
2. La matematica del suo tempo era ancora sotto l’influenza dei **gromatici**, e per Gerberto una dimostrazione certa deve portare a **valori numerici precisi** secondo il sistema di unità di misura illustrato precedentemente.

Ma quest’ultimo punto comportava altre difficoltà:

1. Gerberto, come tutti gli autori a cui fa riferimento, **non conosce** una procedura per l’**estrazione della radice quadrata** di un numero; può solo procedere **per tentativi**, e, se non trova un valore esatto, deve fermarsi;
2. il **sistema numerale romano**, l’unico che conosce Gerberto, nonostante la pletera dei sottomultipli, non è in grado di esprimere in modo efficace **valori frazionari**, quindi non è possibile esprimere neanche con **valori approssimativi** una radice quadrata che non dia un **risultato intero**.

Qui occorre una **deviazione** dal nostro tema. Gerberto **non parla** di un tema **topico** della matematica greca, la **duplicazione del quadrato**. La soluzione, che nell’antichità era molto nota poiché è ripresa da **Platone**⁶⁴, consiste nel tracciare le **due diagonali** del quadrato **ABCD**, dividendolo così in **quattro triangoli rettangoli**; quindi si ribalta ognuno di questi rettangoli verso l’esterno. Si ottiene così un quadrato **MNOP** composto di **otto triangoli uguali ai precedenti**, e quindi un quadrato di **area doppia**:



Il **lato MP** del nuovo quadrato è **uguale alla diagonale BD** del quadrato originario. Possiamo quindi esprimere la dimostrazione precedente applicando il **teorema di Pitagora**. Il quadrato costruito sull’**ipotenusa BD** è uguale alla **somma dei quadrati** costruiti sui cateti **BC** e **CD**.

Proprio agli inizi della matematica antica si era verificato un vero e proprio scandalo. Già intorno al **500 a. C.** un certo **Ippaso** aveva dimostrato che **non esiste nessuna unità di misura**, per quanto piccola, che possa esprimere **sia** la lunghezza del cateto **sia** quella

⁶³ *Est etiam alia regula multo diligentiori speculatione dignissima, quae in his pythagoricis orthogoniis prorsus verissima, et in aliis omnibus orthogoniis vel omnino vera vel veritati proxima est.* Ib. p. 82.

⁶⁴ nel *Menone*. L’opera però non era conosciuta nel Medioevo.

dell'ipotenusa **con valori interi**. Per esprimerci in termini moderni, il rapporto fra l'ipotenusa e il lato ha valore $\sqrt{2}$, ma questo valore non può essere espresso come **rapporto fra numeri interi**. Si ha quindi la scoperta di una **nuova classe di numeri**, detti **irrazionali**. La dimostrazione contraddiceva l'assunto fondamentale dell'aritmetica pitagorica, che prendeva in considerazione solo i **numeri interi**.

Vediamo la dimostrazione con i termini e la notazione della matematica moderna. Procedendo per assurdo, supponiamo che il lato e la diagonale del quadrato siano **commensurabili**, cioè che uno stesso segmento sia esattamente compreso in entrambi un numero intero di volte. Indichiamo con a la misura così ottenuta della diagonale, con b quella del lato, e riduciamo la frazione a/b ai minimi termini. Allora (per il teorema di Pitagora) $a^2 = 2b^2$. Così a^2 , e quindi a , è pari e, dato che a/b è nei minimi termini, b è dispari. Se a è pari, poniamo $a = 2c$. Perciò abbiamo $a^2 = 4c^2 = 2b^2$, e $2c^2 = b^2$. Da cui discende che b è pari. Poiché l'ipotesi che il lato e la diagonale del quadrato siano commensurabili porta all'impossibile conseguenza che lo stesso numero (b) è insieme pari e dispari, l'ipotesi è necessariamente **falsa**.

Ma queste sono **difficoltà insormontabili** della matematica del tempo, e condizionate ancora a lungo lo sviluppo della ricerca.

Tra gli autori oggetto della presente ricerca, il tema viene ripreso da **Vitruvio** nel *De Architectura*⁶⁵, opera che Gerberto non sembra conoscere. L'autore affronta il problema in **modo pratico**, attraverso un'**approssimazione**. Prendiamo un quadrato di **lato 10**. Il quadrato di **10** è **100**, quindi il quadrato costruito sulla diagonale sarà **200**. Ma qual è la **radice quadrata di 200**? $14 \times 14 = 196$: **troppo poco**. $15 \times 15 = 225$: **troppo**. Quindi il valore della diagonale è un **valore intermedio fra 14 e 15**. Più in là Vitruvio non sa andare; si limita a concludere che il problema della duplicazione del quadrato **non ha una soluzione aritmetica**, ma solo una **soluzione geometrica**. Ma anche questo limitatissimo contributo sembra dimenticato.

Nella già citata "**Geometria di autore incerto**"⁶⁶ si trova un elenco disorganico di varie osservazioni, non esente da alcuni gravi errori. Tra l'altro si dice, senza alcuna spiegazione, che il valore della diagonale del quadrato equivalente a **una volta e un terzo la lunghezza del lato**⁶⁷. Subito dopo segue l'enunciato della regola che l'**area del quadrato** di lato **doppio** di un quadrato dato equivale al **quadrato della diagonale**: ma senza nessun approfondimento, né soprattutto nessuna verifica in base all'enunciato precedente⁶⁸.

Il tema è ripreso in alcuni manoscritti attribuiti a un certo **Epifranio** e a un **Vitruvio Rufo** (?)⁶⁹ che non sembra avere alcuna relazione con l'architetto. In brevissime note si dice che un **quadrato con diagonale 10** avrà area pari alla **metà del quadrato costruito sulla diagonale**, quindi **50**; e un quadrato con **diagonale 20** avrà area **200**. Ma non si va oltre gli esempi numerici, non si enuncia una regola generale, meno che mai si tenta una dimostrazione.

Questo, insomma, è **lo stato delle fonti** a cui Gerberto deve far riferimento.

65 *Quadratus locus, qui erit longus et latus pedes denos, efficit areae pedes C. Si ergo opus fuerit eum duplicare, pedum CC, item e paribus lateribus facere, quaerendum erit, quam magnum latus eius quadrati fiat, ut ex eo CC pedes duplicationibus areae respondeant. Id autem numero nemo potest invenire. Namque si XIII constituentur, erunt multiplicati pedes CXCVI, si XV, pedes CCXXV.* Vitruvio *De Architectura*, a cura di Pierre Gros, Giulio Einaudi Editore, Torino 1997, vol. 2° p. 1200.

66 *Geometria incerti auctoris*, pp. 310-364 dell'ed Bubnov citata.

67 *In omni quadrato aequilatero scito diagonum ipsum habere in sui longitudine latus unum et triens lateris.* Ib. p. 352.

68 *Quadrati aream duplicare si vis, diagonum quadrati minoris facito.* ib.

69 Victor Mortet, *Un nouveau texte des Traités d'arpentage e de géometrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus*, Paris 1896 pp. 33-34.

La media geometrica e l'interruzione dell'opera

A questo l'opera si avvia ad una brusca interruzione. Tuttavia Gerberto introduce ancora un argomento, di secondaria importanza, ma che nelle sue fonti veniva messo in grande risalto. In tutta la sua trattazione non è riuscito ad andare oltre il "triangolo pitagorico" di lati **3 - 4 - 5**, e ai multipli interi di questi: **6 - 8 - 10**, **9 - 12 - 15**, **12 - 16 - 20** ... che hanno aree rispettivamente uguali a: **6, 24, 54, 96**... Trova dunque che in questa serie le aree di due triangoli successivi hanno una **media geometrica intera**:

$$\sqrt{6 \times 24} = 12 ; \sqrt{24 \times 54} = 36 ; \sqrt{54 \times 96} = 72 .$$

Da un punto di vista strettamente matematico, è una constatazione abbastanza banale, ma nella prospettiva dell'aritmetica pitagorica, sembrava un aspetto molto significativo.

Cetera desunt, "il resto manca", scrive a questo punto l'editore moderno.

No, c'è ancora qualcosa

Gerberto torna spesso su questi temi anche in scritti successivi. In una lettera ad **Adelboldo**⁷⁰ tocca il tema dell'**area del triangolo equilatero**.

Poiché l'**area** del triangolo è il **semiprodotto della base per l'altezza**, il problema è: come calcolare l'**altezza** x del triangolo equilatero ABC, conoscendo il **lato** a ?

Con la notazione moderna, l'altezza AD, di cui si deve determinare il valore x , divide il lato di base BC in due segmenti uguali, di lunghezza $a/2$. Per il teorema di Pitagora,

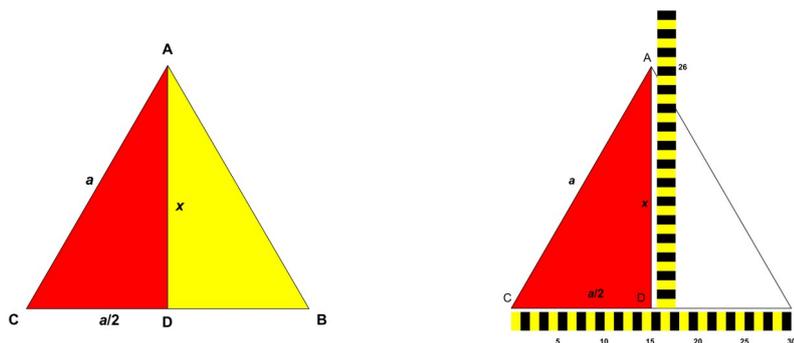
$$x^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 ; x^2 = \frac{3a^2}{4} ; x = \frac{\sqrt{3}}{2} a ;$$

di conseguenza l'area s del triangolo sarà

$$s = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 .$$

Il problema è, di nuovo, che **Gerberto non sa calcolare le radici quadre**.

In una *Geometria* erroneamente attribuita a Boezio⁷¹ si dà al **lato del triangolo** un valore di **30**, e riportando la **scala graduata** sull'altezza (*per collationem*, letteralmente "mettendoli uno accanto all'altro") ottiene il valore **26**. È dunque questo il dato mancante, che **empiricamente** sembra sufficientemente preciso.



70 Gerberti *Opera Mathematica* cit. pp. 41-45. Adelboldo, nato intorno al 975 nei Paesi Bassi, fu canonico di Laubach e vescovo di Utrecht dal 1010 fino alla morte nel 1026. Su quest'argomento si veda: Costantino Sigismondi, *Gerbert of Aurillac: astronomy and geometry in tenth century Europe*. International Journal of Modern Physics Conference Series, January 2012

71 *Boethii geom.[etria] subd.[ititia]*, in Boethii *De Institutione Arithmetica* ed. Friedlein cit. p. 404.

Si procede quindi ad una verifica. Poiché l'altezza divide a metà il triangolo equilatero, e forma il **triangolo rettangolo ACD**, dove l'**ipotenusa** è un lato, pari a **30**, un **cateto** è la **metà del lato di base CD**, quindi **15**, l'**altro cateto** è il segmento **DA** che rappresenta l'**altezza**, a cui si è assegnato il valore **26**, abbiamo:

quadrato dell'ipotenusa: $30^2 = 900$

quadrato del cateto minore: $15^2 = 225$

quadrato del cateto maggiore: $26^2 = 676$

somma dei quadrati dei due cateti: $225 + 676 = 901$.

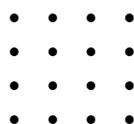
Quindi, un errore di poco superiore allo **0,1%**. Tale risultato sembra all'ignoto autore **sufficientemente preciso**, può dunque calcolare l'area: **$(30 \times 26) / 2 \sim 390$** .

Qual è la differenza rispetto al valore che possiamo calcolare oggi?

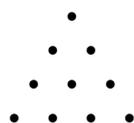
Poiché $\sqrt{3} = 1,73\dots$, l'**altezza** sarà $0,86\dots \times 30 = 25,98\dots$, e l'**area** = **389,71\dots** .

Gerberto **contesta** questo risultato, e ne propone un altro. Per lui l'altezza del triangolo non è 26, ma **$25 + 5/7$** (cioè 25,714... che purtroppo è ancora più sbagliato).

Ma in realtà, il tema della sua discussione è la differenza tra la "**regola geometrica**" e la "**regola aritmetica**"⁷². La regola geometrica è quella che conosciamo. La **regola "aritmetica"** fa riferimento ad un tema classico della **matematica pitagorica**, che tentava di **unificare aritmetica e geometria** attraverso i "numeri figurati", cioè disposti a formare figure geometriche. Per esempio, c'erano i "**numeri quadrati**", come questo:



e i **numeri "triangolari"**, come questo che abbiamo già visto parlando della musica:



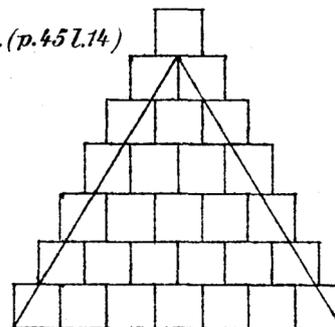
Nel primo caso, abbiamo un'equivalenza fra il "**numero quadrato**" e il "**quadrato del numero**" come lo intendiamo noi: **$4 \times 4 = 16$** .

Nel secondo caso, il totale del numero è la **somma dei numeri interi successivi**:

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$, ovvero: $\sum_{k=1}^4 k = 10$, che si calcola con la formula: la somma **s** dei

primi **n** numeri interi (in questo caso 4) è uguale a: $\frac{4(4+1)}{2} = 10$.

Gerberto dà una curiosa rappresentazione grafica della differenza tra l'**area del triangolo equilatero** e i "**numeri triangolari**"⁷³:



Impilando dei quadratini che hanno per lato la **settima parte del lato del triangolo**, si vede che si sovrappongono ad esso, tranne l'ultimo che sovrasta il vertice. Da questo si dovrebbe dedurre che per Gerberto l'altezza del triangolo è **$6/7$** del lato (0,8571...): di nuovo un **valore approssimativo diverso dal**

72 *de causa diversitatis arearum trigoni aequilateri geometricae arithmeticeve expensi* ib.

73 La figura da *Geometria* cit., p. 45.

precedente. Ma gli interessa soprattutto concludere che il valore del “triangolo figurato” è completamente diverso da quello dell’area del triangolo equilatero: nel **triangolo di base 7**, il numero dei quadratini è:

$$\sum_{k=1}^7 k = \frac{7(7+1)}{2} = 28 ,$$

ma molti di essi **sporgono oltre i bordi della figura**. Nel caso dell’**esempio iniziale**, un **triangolo di lato 30**, il “numero triangolare” è:

$$\sum_{k=1}^{30} k = \frac{30(30+1)}{2} = 465 ,$$

che è parecchio lontano dal valore corretto dell’area.

Questa comunicazione sembra mostrare una certa **cautela** verso l’aritmetica “pitagorica” e le sue indebite generalizzazioni. Senza saperlo, nell’analisi dell’**area del triangolo equilatero** Gerberto incontra lo stesso limite che era già stato indicato millecinquecento anni prima a proposito della **diagonale del quadrato**: l’impossibilità di esprimere alcune grandezze geometriche con un’aritmetica che conosce solo **numeri interi**.

Come dice uno storico moderno, nonostante i suoi limiti, questo è “**il primo scritto di argomento matematico del Medioevo che merita questo nome**”⁷⁴.

Il peso della tradizione

Gerberto aderisce, pur con qualche cautela, all’aritmetica che gli è stata trasmessa da **Boezio**, per il quale ha una vera devozione; e così segue anche il **trattato sulla musica** di **Boezio**, da quale ha imparato che questa disciplina si divide in tre parti: la **musica cosmica**, cioè l’armonia matematica dei corpi celesti; la **musica vocale**, strettamente legata alla liturgia; la **musica strumentale**. Gerberto insegnava musica col **monocordo**, uno strumento formato da una sola corda tesa su una cassa armonica, destinato non alle esibizioni pubbliche, ma all’**insegnamento**, per far sentire agli allievi l’altezza dei suoi ed abituarli alle diverse **scale**; costruì un **organo**, e scrisse un trattato sulle **misure delle canne d’organo**.

Ma percepiva anche la distanza tra le **tecniche di misurazione** che aveva appreso sui libri degli **agrimensori**, e le **immateriali proprietà dei numeri** studiate dai suoi **filosofi** di riferimento; aveva soprattutto sperimentato la difficoltà di **collegare l’aritmetica con la geometria**. Essendo anche un uomo **pratico**, decise di affrontare il problema partendo dalle procedure di **calcolo**.

74 “Die erste mathematische Schrift des Mittelalters, welche diesen Namen verdient, ist ein Brief Gerbert’s... in welchem die Ursache erklärt wird, warum die „geometrisch als Produkt von Grundlinie und halber Höhe berechnete Fläche des Dreiecks eine ander Zahl ist als die „arithmetisch“...” Hermann Henke, *Zur Geschichte der mathematik in Altertum und Mittelalter*, Leipzig 1874, citato da: C. Sigismondi, *Gerbert of Aurillac* cit. p. 2.

L'abaco antico

*pater...
noluit in Flavi ludum me mittere, magni
quo pueri magnis e centurionibus orti
laevo suspensi loculos tabulamque lacerto
ibant octonos referentes idibus aeris...*

...mio padre... non volle mandarmi alla scuola di Flavio⁷⁵, dove andavano, con l'astuccio dei sassolini e la tavoletta appesa alla spalla sinistra, i figli illustri degli illustri centurioni, pagando otto assi alle Idi d'ogni mese...

Orazio, Satire, I 6, vv. 71-75

Una qualche forma di **abaco** è stata in uso presso quasi tutte le civiltà del mondo fino dai tempi più antichi, anche se la documentazione è scarsissima, perché le fonti antiche raramente si soffermano sui fatti banali della vita quotidiana.

L'importanza dell'abaco nel mondo romano è testimoniata dalla parola *calculus*, che in latino significa "sassolino", cioè uno di quei tanti oggettini che venivano usati per fare semplici operazioni di conto. Dal mondo romano sono emersi diversi reperti di *abaci*, nei quali venivano collocati o spostati sassolini o altri oggetti a rappresentare i numeri. I *calculi* venivano messi e tolti in colonne che ne potevano contenere **fino a 4 o 9**. Nel caso di colonne con **4 posti**, al di sopra si spostava un oggetto per indicare il raggiungimento del valore **5**. Le colonne erano segnate con i valori che indicavano **unità, decine, centinaia, migliaia**. Poi a seconda del modello, si potevano inserire le **decine di migliaia**, le **centinaia di migliaia**, i **milioni**... Una volta raggiunto il valore **9** (ovvero **5 + 4**) in una colonna, questa veniva svuotata, e si metteva un segno nella colonna a sinistra.



Alcuni abaci avevano, a destra delle unità, il posto per i **valori frazionari**, indicati questa volta in *once (unciae)*, cioè, come abbiamo visto precedentemente, **dodicesimi dell'unità**: nell'esempio che segue, **cinque posti**, oltre ad una colonna superiore per indicare il **raggiungimento dei 6/12**, ovvero **1/2**, *semis*.

⁷⁵ Questo Flavio era detto *doctor* e *calculator*. Il testo è ironico, gli "illustri centurioni" erano ufficiali di basso grado, che mandavano i figli ad una scuola di mediocre valore; il padre di Orazio, pur provenendo da una condizione poverissima (era uno schiavo liberato) voleva per il figlio il meglio dell'istruzione.

L'abaco di Gerberto

Gerberto si è occupato a lungo dell'abaco, ma fra le sue opere vi sono solo comunicazioni parziali su singoli aspetti della procedura. La fonte a cui facciamo riferimento è il *Liber abaci* di **Bernelino**⁷⁶, personaggio di cui non sappiamo quasi nulla. L'opera si presenta come un' **esposizione completa del sistema di Gerberto**, anche se non sappiamo se Bernelino abbia seguito direttamente le lezioni di Gerberto, o abbia utilizzato i suoi scritti. In ogni caso, le sue spiegazioni sono compatibili con i testi autentici di Gerberto, e con la descrizione sommaria che ce ne ha lasciato **Richero**⁷⁷.

L'abaco di Gerberto è una tavola in cui sono tracciate **27 colonne, divise in gruppi di tre**. Da destra a sinistra troviamo **27 colonne** per i **numeri interi**: le **unità** (indicate con **I**), le **decine** (**X**), le **centinaia** (**C**). Le tre colonne sono poi ripetute a sinistra, per le **migliaia**, indicate con un trattino superiore: $\bar{\mathbf{I}} = 1000$, $\bar{\mathbf{X}} = 10.000$, $\bar{\mathbf{C}} = 100.000$, poi i **milioni** ecc. E, dice l'autore, si potrebbe proseguire all'infinito (*usque in infinitum*).

Gerberto chiama la colonna in cui inserisce un valore unitario *digitus*, indipendentemente dalla posizione nell'abaco; quella più a sinistra, in cui si inserisce il multiplo superiore, è l'*articulus*. Questo ricorda la nomenclatura usata nella logica: il **genere** e la **specie** indicano il termine superiore e quello inferiore, indipendentemente dalla loro posizione nella gerarchia dei concetti.

Non è chiaro che genere di calcoli pensasse di fare Gerberto con **27 colonne**, con le quali si potrebbero rappresentare le centinaia di milioni di miliardi di miliardi... Tuttavia Bernelino non descrive mai nelle sue spiegazioni l'abaco completo, limitandosi alle colonne necessarie per illustrare gli esempi delle diverse operazioni.

Nella descrizione di Bernelino le colonne sono **30**, poiché a destra della colonna delle unità ve ne sono **altre tre** servono per il calcolo dei **sottomultipli su base 12**, cioè delle *unciae* e dei **sottomultipli dell'uncia**. Gli altri testimoni dell'insegnamento di Gerberto, in primo luogo Richero, non fanno cenno a quest'aggiunta, che probabilmente è propria di Bernelino.

La grande novità è che Gerberto si fece fare da un artigiano **mille segnalini** (*characteres*)⁷⁸ in corno, su cui erano indicati i numeri da **1** a **9**. Sembra evidente che Gerberto abbia usato le **cifre arabe**: per lo meno sono queste che compaiono nelle copie del libro giunte a noi. Nelle colonne non si mette un numero di sassolini pari al numero da calcolare, ma si mette un singolo "**carattere**" che porta la **cifra corrispondente**. Non esistendo lo **zero**, là dove è necessario, rimane la **colonna vuota**. Ovviamente, l'"**abacista**" deve conoscere le "tabelline"; e non solo quelle dell'**addizione**, che erano rimaste nei ricordi di Sant'Agostino come una noiosa cantilena "uno più uno due, due più due quattro..."⁷⁹, ma anche quelle della **moltiplicazione**, che Bernelino deve inserire nell'opera, poiché non sembra che all'epoca fossero universalmente note come oggi⁸⁰.

Bernelino dà per scontato che il lettore sappia fare **addizioni** e **sottrazioni**, con l'unica accortezza di non riempire le colonne di segnalini, ma di inserire solo il **carattere** col numero arabo richiesto. Partendo dalla colonna più a destra, quella delle unità, si aggiungono gli addendi, o si tolgono i minuendi. Se, facendo l'addizione, nella colonna in cui si sta operando – il *digitus* – si supera il valore 9, si aggiunge un valore 1 nella colonna a sinistra – l'*articulus* – mentre il *digitus* rimane vuoto oppure è occupato col

76 *Œuvres de Gerbert*, ed. A. Olleris cit., pp. 357-400.

Vedi anche: Mariairene Guagnini, *L'abaco di Gerberto d'Aurillac*, consultabile on line:

https://www.progettofibonacci.it/skede/abaco_Gerberto/HTML-abaco_Gerberto/abaco_Gerberto800.html.

77 III, 54.

78 Richeri *Historiarum libri IIII* ed. Hartmut Hoffmann cit., p. 198; trad. italiana: Richer di Saint Remi, *I quattro libri delle Storie* a cura di P. Rossi cit., p. 132.

79 ... iam vero unum et unum duo, duo et duo quattuor odiosa cantio mihi erat... Agostino *Confessiones* I, 13.

80 Quella che noi chiamiamo impropriamente "tavola pitagorica" si trovava già in Boezio, *Arithmetica* cit.

valore residuo. Inversamente facendo la sottrazione: si toglie il valore dal *digitus*, eventualmente recuperando un valore dall'*articulus* se il minuendo è minore del valore da sottrarre. E così via nelle colonne successive.

Si forniscono invece delle dettagliate descrizioni sull'esecuzione di **moltiplicazioni** e **divisioni**, che sono la parte veramente rivoluzionaria del nuovo abaco.

La moltiplicazione e la divisione con l'abaco

Tutto l'abaco è attraversato orizzontalmente da tre linee che formano quattro **fasce** (*trabes*): nella prima si mette il **moltiplicando**, nella seconda i **valori parziali**, nella terza il **risultato**, nella quarta il **moltiplicatore**.

Il primo esempio è la risposta ad un curioso **indovinello** che doveva essere all'epoca piuttosto diffuso:

Vi sia una torre che contiene dodici "finestre" (cioè stanze), in ognuna delle quali vi siano letti, ognuno dei quali accoglie dodici uomini con le loro dodici mogli, ognuna delle quali allatta dodici bambini. Si chiede a quale quantità si arriva attraverso la regola della moltiplicazione⁸¹.

Quindi: tre moltiplicazioni successive, **XII per XII per XII per XII**, con la somma di tutti i valori parziali. Noi diremmo: $12 + 12^2 + 12^3 + 12^4$: ma ho mantenuto qui e in tutti gli esempi che seguono la **numerazione romana** del testo, per dare la sensazione della difficoltà che doveva avere il lettore dell'epoca, difficoltà opposta ma equivalente alla nostra, cioè il continuo passaggio fra **due sistemi non solo graficamente, ma soprattutto concettualmente molto diversi**.

Cominciamo dunque con la **moltiplicazione di XII per XII**:

C	M	X	M	I	C	X	I	Valore delle colonne
							① ②	Moltiplicando
							②	Risultati parziali
					①	②	④	
					①	④	④	Risultato finale
						①	②	Moltiplicatore

Nella prima colonna si moltiplica il valore delle unità del moltiplicando (**II**) per il valore delle unità del moltiplicatore (**II**). Il risultato (**IIII**) si mette nella prima colonna dei risultati parziali (unità per unità = unità).

Il valore delle unità del moltiplicando (**II**) si moltiplica per il valore delle decine del moltiplicatore (**I**). Il risultato (**II**) si mette nella seconda colonna dei risultati parziali (unità per decine uguale decine).

81 ... *proposita una turri quae XII tantum contenta fenestris, in harum unaquaque XII stratus habeat, quorum unusquisque, susceptis XII viris, eorum unusquisque mulieres totidem habeat, quarum quaeque XII lactet infantes. Queratur ad cuius numerositatis perveniant quantitatem per multiplicationis regulam.* Gerberti Opera ed. Olleris, p. 363.

Il valore delle decine del moltiplicando (**I**) si moltiplica del valore delle unità del moltiplicatore (**I**). Il risultato (**II**) si aggiunge a quello già esistente nella colonna delle decine (decine per unità uguale decine).

Il valore delle decine del moltiplicando (**I**) si moltiplica per il valore delle decine del moltiplicatore (**I**). Il risultato (**I**) si mette nella terza colonna, quella delle centinaia (decine per decine uguale centinaia).

Colonna per colonna si sommano i valori pariali. Unità **IIII**, decine **XXXX**, centinaia **C**.

Risultato: **CXLIV**.

La procedura è quindi la stessa che usiamo ancora oggi per le moltiplicazioni su carta.

A questo punto è sufficiente dare lo schema della **Moltiplicazione di XII per CXLIV**:

C	M	X	M	C	X	I				
							①	④	④	Valore delle colonne Moltiplicando
							②	⑧		Risultati parziali
							④	④	⑧	
						①	⑦	②	⑧	Risultato finale
								①	②	Moltiplicatore

Nella seconda colonna la somma di **LXXX** (siamo nella colonna delle **decine!**) più **XXXX** dà **CXX**, quindi si mette il segno che vale “**due**” nel *digitus*, e “**uno**” nell’*articulus* (la colonna successiva, le **centinaia**). Nella terza, le centinaia, si sommano i due risultati precedentemente ottenuti più il valore che deriva dalla somma delle decine: **CC + CCCC + C = DCC**. Nella quarta colonna rimane il segno che vale “**uno**” cioè **M**.

Il risultato è **MDCCXXVIII**.

Il lettore può trovare da sé la **soluzione finale** del problema.

La **divisione** è un problema più complesso.

Se si tratta di dividere un numero per un valore inferiore a 10 (valore delle unità), si divide semplicemente il dividendo, **colonna per colonna**, a partire da sinistra, tenendo ogni volta conto del resto, che viene aggiunto alla colonna successiva. Alla fine si otterrà il quoziente, più un eventuale resto

Per divisori con più cifre, la **prima spiegazione** data è procedere per **successive sottrazioni**, togliendo al **dividendo** volta per volta il valore del **divisore**. Ma è un procedimento molto lungo, inutilizzabile per calcoli con numeri grandi.

Il **secondo metodo** è più simile al nostro.

Si arrotonda il divisore al valore superiore, che richieda solo un *carattere* nella colonna più a sinistra, lasciando vuote le colonne di destra: quindi **XVI** si arrotonda a **XX** (carattere “due” nella colonna delle decine) ecc. Per quest’unico valore si divide il dividendo, partendo dalle colonne più a sinistra; il quoziente viene moltiplicato per il dividendo originario, e lo si sottrae dalle colonne del dividendo.

Il problema delle fonti arabe⁸²

Ci troviamo di fronte ad un grosso problema che riguarda la storia della cultura europea. Quando, come, in che misura gli studiosi dell'Europa cristiana potevano **utilizzare le opere che circolavano nel mondo arabo-islamico**, sia le **traduzioni dei classici greci**, sia **opere originali**?

Il primo manoscritto latino in cui vengono **riprodotte le cifre arabe (senza lo zero!)** risale al **976**. Si tratta quindi di un'epoca molto remota rispetto all'effettiva adozione dei numeri arabi in Europa.

Il testo del *Liber abaci* che descrive l'abaco di Gerberto è giunto a noi in **manoscritti non anteriori alla metà del XII secolo**. Nelle opere note di Gerberto **non compaiono mai le cifre arabe**, così come non c'è nessuna prova che, su questa o su altre materie, egli possa aver utilizzato testi arabi o tradotti dall'arabo. Anche **Bernelino** usa le cifre arabe solo nelle illustrazioni dell'abaco e nelle istruzioni per l'uso: ma quando spiega le diverse operazioni attraverso vari esempi, **esprime sempre i valori in numeri romani**.

Eppure il modo latino-cristiano e quello arabo erano vicinissimi, e la **Catalogna**, dove il giovane Gerberto era andato ad affinare la sua cultura, era una terra di confine e di incontro. Tra i poteri cristiani e quelli islamici, vi erano, nelle pause delle guerre, fitti **rapporti diplomatici**. Molti cristiani parlavano arabo, e molti musulmani parlavano le lingue dell'Europa cristiana. Soprattutto vi erano fitti **scambi commerciali**, testimoniati dalla presenza in Europa di monete d'oro arabe, i cosiddetti **mancusi**, che colmavano un vuoto lasciato dal sistema monetario argenteo introdotto da Carlo Magno.

Ancor più fitti erano i rapporti con l'**Oriente bizantino**. Le due chiese, per quanto diffidenti l'una verso l'altra, si basavano sullo **stesso apparato dottrinario**, sugli stessi canoni conciliari, che erano scritti in greco. Vi era una costante **attività diplomatica**. **Ottone II** sposò una principessa greca, **Teodora**, che divenne madre di **Ottone III**. Matrimoni di questo genere erano sempre il risultato di trattative ad altissimo livello, e l'Imperatrice si portò in Germania un'ampia corte di dignitari. Anche la moneta di Costantinopoli, il **solidus aureo** o "**bisante**", circolava tra i membri dell'aristocrazia.

Anche mercanti, avventurieri, pellegrini, amavano tornare dall'Oriente, dalla Terra Santa, dalla Spagna meridionale, portandosi come *souvenir* di viaggio dei **prodotti di alto artigianato**: gioielli, tessuti, armi cesellate, selle decorate, oggetti in avorio, del bel vasellame colorato e smaltato – talmente bello da venire esibito sulla facciata delle chiese più prestigiose – ed **animali esotici** (anche se meno ingombranti di quell'elefante di nome **Abul Abbas** che il califfo Harun al-Rashid aveva fatto recapitare a Carlo Magno) – e qualcuno di quegli **strani oggetti tondi in metallo**, con un'asticciola imperniata al centro, che avevano sul bordo tante scritte in arabo, e dei segni che più o meno si riconoscevano come le "**case**" dello **Zodiaco**...

Perché, nonostante questi continui contatti e scambi, la cultura sembra esclusa? Forse continua a sussistere un atteggiamento di **diffidenza etnica**, di disinteresse, di disprezzo verso mondi che appaiono troppo "diversi" perché possano dare qualcosa di buono e utile, o anche solo suscitare una curiosità. Questi contatti poi erano tenuti da personaggi che si occupavano esclusivamente, della loro **specializzazione**: i militari si occupavano di guerra, i diplomatici si occupavano di trattative, gli ecclesiastici si occupavano di teologia, i mercanti si occupavano di mercati e di monete, i pellegrini si occupavano della salvezza della loro anima... non c'era né tempo né interesse per la **scienza pura**.

82 Menso Folkerts, *La civiltà islamica* cit. Thomas Freudenhammer, *Gerbert of Aurillac and the Transmission of Arabic Numerals to Europe* Sudhoffs Archiv Bd. 105, H. 1 (2021), pp. 3-19. Samer Sayed Qandil, Daniel G. König: *984: Some Letters to and by Gerbert d'Aurillac Dealing with "Arabic" Mathematics and Astronomy* Transmediterranean History, Vol. 3 No. 1 (2021).

All'epoca, interessi propriamente scientifici erano propri di un'**infima minoranza**. È vero che le "arti liberali" erano parte del programma formativo, ma scontavano la loro condizione di sostanziale inferiorità rispetto alla **teologia** e al **diritto canonico**. A parole, la filosofia era la "**conoscenza delle cose umane e divine**"; ma di fatto si trattava di un passaggio inevitabile e, per i più, forse anche abbastanza fastidioso, per arrivare alle cose che veramente "**servivano**" per il mestiere di chierico.

Gerberto ci appare una figura luminosa proprio perché vive in un **sostanziale isolamento**. Ne è testimonianza la **bassa qualità del materiale scientifico dell'epoca**; perfino molti testi che ci sono arrivati con la falsa attribuzione a Gerberto presentano spesso grossolani errori, ripetuti pedissequamente da una copia all'altra.

Non si era ancora creata quella "**massa critica**" di studiosi impegnati in una ricerca disinteressata, che si tengono costantemente in contatto fra di loro, si scambiano opinioni, ricerche, scoperte, anche errori. Quella fitta rete di scambi intellettuali che è, al di là dei contributi dei singoli, la vera **matrice del progresso scientifico**.

Una cosa che non si era ancora capito è che nella numerazione araba la cifra **zero** è indispensabile. Solo così abbiamo un sistema in cui le singole cifre di per sé non hanno nessun valore, ma lo acquisiscono solo per la loro **posizione**, tenendo conto anche delle posizioni in cui non ci sono cifre: le **colonne vuote dell'abaco**. Ma per una mentalità che vede nei numeri le **cose numerate**, lo **zero** è un **non numero che non conta nessuna cosa**. In un sistema in cui i numeri esprimono la **segreta essenza delle cose**, preordinata da **Dio** all'atto della **creazione**, non c'è posto per un numero che esprime il **nulla**.

Eppure, solo quel sistema di numerazione permette all'aritmetica di fare quel **salto verso l'astrazione** che la **geometria** aveva compiuto agli inizi della civiltà classica. Con la notazione decimale, anche i numeri diventano **entità astratte di cui si studiano le proprietà formali attraverso procedure logiche rigorose**. **Non si studiano i singoli numeri, ma le proprietà comuni all'intero sistema**.

Gerberto si avvicina a questo traguardo più di chiunque altro della sua epoca. Ma rimane ancora indietro. Il salto definitivo verrà fatto non più da un ecclesiastico, da uno *scholasticus*, ma da un **mercante figlio di mercanti**. Il **Liber abbaci** scritto dal pisano **Leonardo Fibonacci** nel 1202 renderà inutile l'abaco, sostituito da una **rapida scrittura su carta**, e aprirà una **nuova epoca nella storia della matematica**.

L'astronomia: il cielo di giorno, il cielo di notte

שָׁמַר מִהַמְּלִילָה שָׁמַר מִהַמְּלִיל

Sentinella, quanto resta della notte?

Sentinella, quanto resta della notte?

Isaia 21, 11

L'**astronomia** nasce nelle antiche civiltà da una doppia motivazione.

Da una parte c'era la **meraviglia, la curiosità, ed anche il timore**, per quello spettacolo che allora era così familiare e insieme lontano – spettacolo che oggi ci è quasi del tutto negato dall'inquinamento atmosferico e luminoso. Nell'antichità non c'era differenza tra **pensiero scientifico, religione e magia**. Quindi la **comprensione dei moti dei cieli** aveva implicazioni anche nella **vita quotidiana delle persone e delle comunità**.

Dall'altra parte c'era l'esigenza, anch'essa profonda nella natura umana, della **misura del tempo**, quel fluire continuo in cui siamo inseriti ma di cui non sappiamo dare una

vera definizione. Oggi il tempo si misura con vari dispositivi meccanici ed elettronici, ma per migliaia di anni l'unica fonte di informazione era appunto la **volta celeste**.

Le due cose sono quindi intimamente correlate. **Per comprendere i movimenti del cielo, bisogna saper misurare il tempo. E per misurare il tempo, bisogna comprendere i movimenti del cielo.**

Noi siamo ancora eredi dei **babilonesi**. Furono loro che tentarono di combinare il ritmo del sole e della luna escogitando un **calendario di dodici mesi**, ognuno della durata di **trenta giorni**, approssimando quindi la durata dell'anno a **360 giorni**.

Contemporaneamente, individuaronò nella volta celeste quel cerchio massimo che chiamiamo **eclittica**, la strada percorsa dal sole nel corso dell'anno. Divisero anch'essa in **dodici parti**, ognuna suddivisa in **trenta unità minori**. Ad ognuna di queste parti associarono una **costellazione**, indicata col nome di un **animale** o di un **personaggio**, costruendo così quello che i greci chiamarono "**zodiaco**", dove si trovano i "**viventi**"⁸³. Tutta la circonferenza del cielo si trovò così suddivisa anch'essa in **360 parti**, sistema che noi abbiamo ereditato come la più comune **misura degli angoli**.

Divisero poi anche il giorno in **12 porzioni**, le **ore**, che in un secondo tempo furono ulteriormente suddivise in **12 per il dì e altrettante per la notte**.

Lo studio del cielo aveva dunque come prima finalità l'**oroscopo**, termine che in greco significa appunto "**osservazione dell'ora**"⁸⁴, e poi fu caricato di tanti altri significati.

L'astronomia fece enormi progressi nel mondo greco, soprattutto in età ellenistica e romana, ma il tema della misura del tempo rimase sempre centrale. Soprattutto si doveva dar conto **della diversa durata del giorno e della notte**, a seconda delle **stagioni** e delle **latitudini**. Questo portò ad una complessa classificazione delle diverse zone della Terra, in base alla **diversa durata del giorno al momento del solstizio**. Il fenomeno dipende ovviamente dalla diversa **inclinazione** dei raggi del sole, e questo portava a definire diversi "**climi**"⁸⁵, che **nella versione di Tolomeo erano ben 39**, dall'equatore (giorno di 12 ore) al "circolo artico" (giorno di 24 ore) al polo (giorno di 6 mesi). Per motivi pratici questa classificazione fu poi semplificata a **7**, fino a quella adottata ad **Aristotele**, che vede solo **5 "climi"**: quello **equatoriale**, il **temperato settentrionale** e temperato meridionale (gli unici **abitabili**, per Aristotele), il **polare artico** e antartico⁸⁶.

In mancanza di strumenti meccanici, solo l'osservazione astronomica permetteva di calcolare, in tutte le stagioni, la durata delle ore "**equinoziali**", quindi riferite ad una **uguale durata del dì e della notte**, e la differenza rispetto alle ore misurate dal sorgere al tramontare del sole⁸⁷.

L'astronomia greca aveva moltissimi altri temi, fino allo sviluppo di un **modello** molto raffinato di universo capace di spiegare quasi tutti i fenomeni visibili e misurabili ad occhio nudo; ma la **misurazione del tempo** aveva in più un grande interesse pratico e religioso, poiché sia nel mondo islamico, sia in quello cristiano, vi era l'obbligo delle **preghiere quotidiane ad ore fisse**. Il problema tuttavia fu poi risolto definitivamente solo con l'introduzione dei primi **orologi meccanici**; nell'Europa cristiana, fino al XV secolo il clero continuò ad usare le ore solari per le preghiere quotidiane.

83 ὁ κύκλος τῶν ζῳδίων, il "circolo degli animalletti".

84 ὠροσκόπος, da ὥρα "ora" e σκοπέω "guardo". In realtà in greco ὥρα (*hora*) ma un significato molto più ampio, indicando diversi tipi di intervallo di tempo, fra cui anche "stagione".

85 κλίμα pl. κλίματα, cioè "inclinazione".

86 Aristotele, *Metereologica*, II, 5.

87 Marziano Capella riferisce anche dell'uso di clessidre ad acqua per misurare la durata dei fenomeni celesti. *Le Nozze* cit. VIII 847, p. 605.

L'astronomia di Gerberto⁸⁸

Come sempre, quando si parla delle opere scientifiche di Gerberto, dobbiamo ricordare che si tratta di attività legate in primo luogo all'**insegnamento**⁸⁹.

L'astronomia era il capitolo finale, il coronamento delle arti del quadrivio. È qui che appare più evidente la definizione della filosofia come "**conoscenza delle cose umane e divine**". E come nelle altre discipline, Gerberto si è sforzato di **superare i limiti della cultura del tempo**, anche con l'elaborazione di **strumenti didattici** adeguati.

L'**astronomia del medioevo** si limita a descrivere le **coordinate** fondamentali per orientarsi nell'osservazione diretta dei corpi celesti; e con questo termine intendiamo in primo luogo il **sole**, poi le **stelle** e le **costellazioni** più facilmente visibili ad occhio nudo. Non si parla quasi mai di **pianeti**⁹⁰. Per la **luna**, in genere ci si limita a descrivere le sue **quattro fasi** nel corso del mese.

Le sfere

Gli **strumenti didattici** descritti nelle opere sicuramente autentiche di Gerberto, e nelle testimonianze di coloro che lo conobbero, in particolare **Richero di Saint Remi**, sono diverse **sfere**, sia **solide**, sia **armillari**⁹¹.

Già nell'astronomia antica⁹² si usavano **modellini dell'universo**, su cui si rappresentavano le **coordinate fondamentali** e gli oggetti visibili più importanti: l'**equatore**, il cerchio massimo tracciato su un piano perpendicolare all'asse di rotazione dell'universo; l'**eclittica**, su cui si sposta il sole nel corso dell'anno, occupando via via le diverse **case** dello **zodiaco**, e che interseca l'equatore nei due **punti equinoziali**; il **coluro equinoziale**, che unisce i poli ai punti equinoziali; il **coluro solstiziale**, che unisce i poli ai due solstizi. Queste circonferenze erano rappresentate con **anelli metallici** detti comunemente **armillae**, cioè braccialetti.

In una lettera al suo ex allievo Costantino⁹³ Gerberto spiega **come ha realizzato due sfere**. La prima è in **legno**, **piena**, e serve a far vedere le principali coordinate geografiche e astronomiche. È tracciato un **cerchio massimo**, che corrisponde al **meridiano** di riferimento e all'**antimeridiano**, diviso in 60 parti a partire dall'alto. Con un compasso centrato all'inizio della linea (*caput lineae*, cioè al **polo nord**) e aperto fino alla 6^a tacca si traccia una **circonferenza**; si traccia una **seconda circonferenza concentrica alla prima**, a partire dall'**11^a tacca**. Una terza circonferenza corrisponde alla 15^a tacca; dopo di che, si fa centro dalla parte opposta (quindi il polo sud) e si

88 Un'analisi puntuale e completa in: Emmanuel Poulle, *L'Astronomie de Gerbert*, in: *Gerberto, scienza, storia, mito* cit. pp. 597 ssg.

89 "L'œuvre de Gerbert en matière de cosmologie est directement liée à son enseignement de l'astronomie dans le cadre du quadrivium", E. Poulle, *L'Astronomie de Gerbert* cit., p. 602.

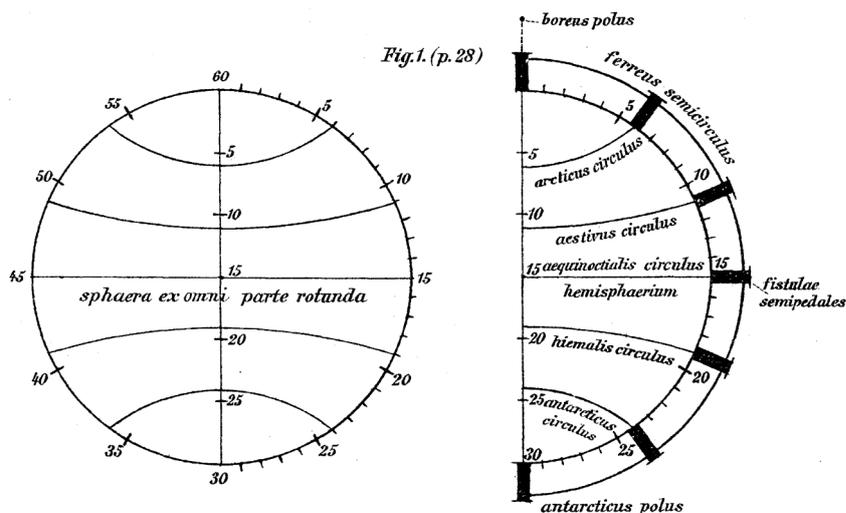
90 "... il n'y a, dans l'œuvre astronomique de Gerbert, qu'elle soit authentique ou douteuse, ... rien qui soit relatif aux mouvements des planètes..." Poulle, op. cit. p. 600.

91 Gerberti *Opera* cit.: *De Sphaera*, pp. 25-28. Richero op. cit. Libro III capp. 50-53, pp. 131-132. L'attività teorica e pratica di Gerberto, non solo come studioso ma anche come costruttore di strumenti, è illustrata in: Marek Otisk, *Gerbert of Aurillac (Pope Sylvester II) as a clockmaker*; *Teorie Vědy / Theory of Science* XLII, 2020, 1 pp.25 ssg.

92 In Marziano Capella (*Le Nozze* cit. VI 580, p. 403) la Geometria è rappresentata come "una donna molto distinta, che portava nella mano destra una riga, nell'altra una sfera solida" (*feminam luculentam radium dextera, altera sphaeram solidam gestitantem*).

93 Costantino di Fleury-sur-Loire, di cui Gerberto sottolinea la nobile famiglia d'origine, divenne in seguito abate di San Massimino di Micy. Riché, op. cit. p. 78.

tracciano altre due circonferenze, in corrispondenza della 19^a tacca; l'ultimo in corrispondenza della 24^a (le immagini sono tratte dall'ed. Bubnov citata).



Dividendo per 60 l'intera circonferenza (360°) ogni tacca corrisponde a 6°. Se riportiamo queste misure all'attuale misura della latitudine abbiamo:

Poli	= ± 90°
Circoli polari:	6° × 9 = ± 54°
Tropici:	6° × 4 = ± 24°
Equatore	= 0°.

Si noti però che in questa rappresentazione i “**circoli polari**” non sono quelli che intendiamo ora, cioè il limite oltre il quale in inverno il sole nelle 24 ore non sorge mai sopra l'orizzonte, ma fanno parte della classificazione tradizionale delle zone terrestri in **climi** in base alla massima lunghezza del giorno⁹⁴. I due **tropici**, che si trovano a ± 23° 26', corrispondono quasi esattamente a quanto indicato da Gerberto, e indicano la latitudine alla quale la **lunghezza massima del giorno è di 13^h 30^m**, mentre quelli che l'editore moderno indica come “**circoli polari**” dovrebbero corrispondere ai paralleli che hanno come **durata massima del giorno 24 ore (± 66° 33')**; la latitudine indicata da Gerberto corrisponde invece ad una **durata massima del giorno di 17 ore**. Non è chiaro da chi abbia tratto questa indicazione.

Decisamente insolita la descrizione della seconda sfera. Si tratta di una **mezza sfera (emisphaerium) cava**, con **sette fori**, nei quali sono inseriti dei **tubicini (fistulae)**: due in corrispondenza dei **poli**, che quindi sono **sulla stessa linea**, in modo che ci si possa vedere **attraverso**. Gerberto precisa che non sono cannuce di materiale organico (*differunt a fistulis organicis*), ma in un altro materiale che permetta di ottenere una **larghezza costante** e non impedisca la vista. Sono tenute ferme da un robusto **semicerchio di ferro** lungo tutta la semicirconferenza. Fissando quindi il “**polo boreale**” (*boreum polum*) attraverso i due fori alle estremità, si avrà un riferimento per riconoscere la **posizione degli altri cerchi sulla volta celeste**, e quindi un'indicazione per **collocare le stelle**. Naturalmente non si potrà vedere il **polo opposto**, perché è sotto terra.

Strumenti di questo genere, che oggi ci appaiono piuttosto banali, in realtà all'epoca comportavano notevoli difficoltà di realizzazione. In una sua lettera Gerberto dice di aver realizzato una sfera in **legno tornito**, e di averla fatta ricoprire con **cuoio di cavallo**. Ma se il corrispondente vorrà averla completa di tutti gli elementi necessari, dovrà aspettare almeno un anno. E naturalmente non potrà averla gratis: in cambio, Gerberto chiede una copia di **Stazio**.

94 Cfr. Poulle op. cit p. 604.

È cruciale la correttezza del puntamento: per questo occorre avere un **riferimento fisso**. Si prende quindi un'altra *fistula* che si mette in **posizione saldamente fissa**, puntata sul **polo**. Se, osservando per **tutta la notte** (*tota nocte*), il *polus* è sempre lì, allora il puntamento è **corretto**.

... sì, ma dove devo guardare?

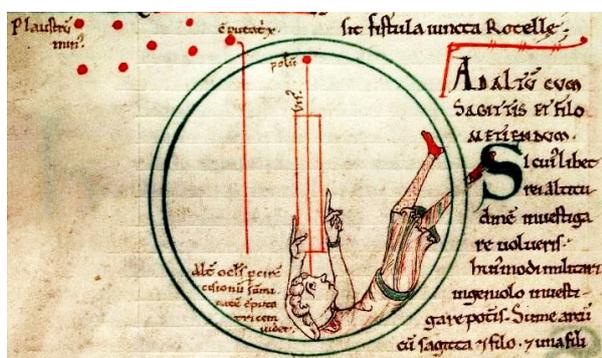
La spiegazione è abbastanza chiara, anche se l'uso dell'oggetto non sembra molto agevole. Ma la domanda è: cosa intende Gerberto per *polus*? La prima risposta che viene in mente è: la Stella Polare.

La **Stella Polare** è un riferimento tradizionale anche per chi non ha particolari competenze astronomiche. Oggi non corrisponde esattamente al **polo nord astronomico**, se ne discosta per **circa $\frac{3}{4}$ di grado**. Ripetendo l'osservazione descritta da Gerberto con un tubo fisso, se non si va tanto per il sottile, la si vede percorrere un **circolino di circa un grado e mezzo** di diametro, e quindi, se non si usa uno strumento troppo preciso, dovrebbe rimanere sempre visibile attraverso il foro.

Ma il **polo nord astronomico non è sempre stato lì**. Gli astronomi del Museo di Alessandria avevano scoperto il fenomeno della **precessione degli equinozi**: il lentissimo spostamento di tutta la volta celeste, con l'**asse di rotazione** che, mantenendo immutata la sua angolazione rispetto al piano dell'equatore, si **sposta in senso orario** con un periodo di circa 25.000 anni. Di conseguenza, ai tempi di Gerberto la stella si trovava a **7° 19' dal polo nord**⁹⁵. Una distanza apprezzabile anche con un'attrezzatura rudimentale. In un recente studio⁹⁶ si identifica la stella che Gerberto indica come *polus* in un oggetto oggi noto come **HR4893**, ma che non aveva, nei cataloghi antichi, un nome, poiché è una stella **ai limiti della visibilità ad occhio nudo** (magnitudine apparente **5,50 su una scala da 0 a 6**).

In manoscritti del XII secolo si vede Gerberto che punta il suo tubo verso una stella, indicata come *Polus*, che è distinta dall'ultima stella dell'Orsa Minore, quella che noi chiamiamo appunto "Polare", ma che in quelle immagini è indicata come *Computatrix*.

In una Cronaca del 1014 si dice che a Magdeburgo si poteva ancora vedere un "**orologio**" costruito da Gerberto, consistente in una *fistula* che permetteva di osservare "una certa stella, che è guida dei marinai"⁹⁷. Confrontando la posizione di *Computatrix* rispetto a *Polus* si poteva **calcolare l'ora**: si tratterebbe dunque di un "**notturlabio**". Questa sembra essere l'**unica testimonianza diretta di un'osservazione astronomica compiuta da Gerberto**.



95 Dato ricavato con l'applicazione *Stellarium* per l'anno 982, quando Gerberto divenne abate di Bobbio.

96 Costantino Sigismondi, *Gerbert of Aurillac: astronomy and geometry in tenth century Europe*, International Journal of Modern Physics Conference Series, January 2012. L'immagine riprodotta è a p. 2. Vedi anche: Elizabeth Cavicchi, *Activity inspired by Medieval Observers and Tubes*, in: *Orbe Novus Astronomia e Studi Gerbertiani*, Universitalia 2010, pp. 30-34.

97 *In Magdeburg horalogium fecit, recte illud constituens secundum quandam stellam, nautarum ducem, quam consideravit per fistulam miro modo* ib. p. 4.

Altre sfere

Anche **Richero**⁹⁸ descrive queste due sfere, aggiungendone **altre due**.

Una è una **sfera armillare** vera e propria, sul tipo di quelle fatte dai **greci**, cioè composta solo di **anelli metallici** (*ex solis circulis*). I primi due sono i due **coluri**, cioè i **cerchi meridiani** passanti uno per gli **equinozi**, l'altro per i **solstizi**. A questi aggiunse **cinque paralleli**, cioè i due cerchi **polari**, i due **tropici** e l'**equatore**, come quelli tracciati sulla sfera di legno descritta sopra. Ad essi attaccò, con la sua corretta inclinazione, l'**eclittica** (*circulum obliquavit*), che contiene le **stelle delle costellazioni** (*eo quod animalium figuras in stellis contineat*): quindi solo le “**case**” dello **zodiaco**. Infine a questi aggiunse i cerchi dei **pianeti** (*errantium circulos*), in modo da far vedere i loro **movimenti**. Purtroppo Richero interrompe qui la sua descrizione, che gli sembrava ormai troppo lunga (*ob prolixitatem*), e quest'**unica menzione** relativa all'interesse di Gerberto per il movimento dei pianeti ci lascia con **molte più domande che risposte**.

In modo più sommario descrive infine un'**altra sfera**: **solida**, come la prima, senza anelli, sulla cui superficie le costellazioni erano figurate **con fili di ferro e rame** (*ferreis atque aereis filis*): probabilmente dei chiodi di ferro piantati nel legno rappresentavano le **stelle**, e i fili di rame le riunivano nelle **figure delle costellazioni**. Anche questa sfera era attraversata da una **fistula**, che veniva puntata verso il polo, in modo da avere fra le mani una vera **mappa sferica del cielo**. Richero esalta l'**efficacia** di questi strumenti didattici, che risultavano chiarissimi anche a chi non aveva **nessuna nozione di astronomia**.

L'astrolabio

...as verreyli as may be taken by so small an instrument...

... con tutta l'accuratezza che si può ottenere da uno strumento così piccolo...

Geoffrey Chaucher⁹⁹

Tralasciando la storia dell'astronomia antica, della complessa storia dell'**astrolabio**¹⁰⁰ mi limiterò ad alcuni cenni indispensabili per le finalità che mi sono proposto in questo breve articolo.

È difficile capire quando sia comparso questo strumento, anche perché nelle fonti antiche spesso i termini “**astrolabio**” e “**orologio**” sono usati come **sinonimi**, e non è chiaro a quale strumento esattamente ci si riferisca. Si tratta di una **creazione bizantina**, derivata dalla “sfera armillare”; la volta celeste, anziché venire simulata in tre dimensioni, viene **proiettata su una piccola superficie piana**, in modo da ottenere un oggetto facilmente trasportabile e utilizzabile. In seguito l'astrolabio divenne una specialità della **cultura islamica**, e come tale era visto in Europa. Era, come dice il più noto storico della materia, un “**gioiello matematico**” (*joyau mathématique*)¹⁰¹, non solo perché permetteva di risolvere facilmente alcuni complessi problemi, ma anche perché era un bell'oggetto, costruito in materiale nobile, che dava prestigio al possessore. L'aura di esotismo che

98 Richeri op. cit III, 50-53.

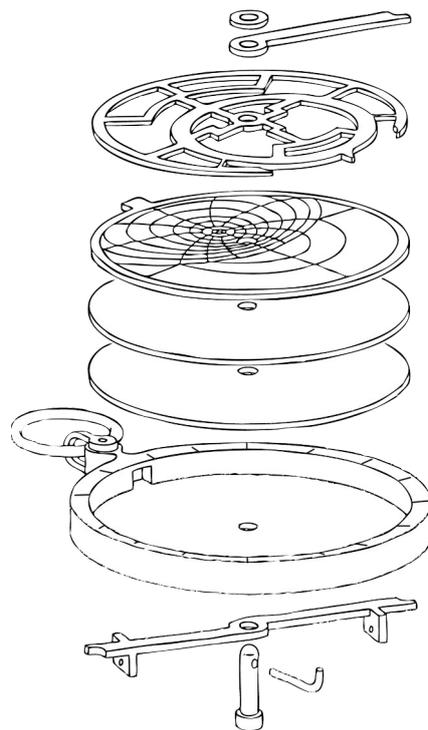
99 Geoffrey Chaucher, *Tractatus de Conclusionibus Astrolabii (bred and mylk for childeren) A. D. 1391*, Edited by Rev. Walter W. Skeat, M.A., London 1872. Part II § 3, p. 17.

100 Da ἀστήρ “stella” e λαμβάνω “(com)prendo”. Mi limito a indicare due testi di carattere generale; il secondo dedica una particolare attenzione agli astrolabi italiani: Henri Michel, *Traité de l'astrolabe*, Gauthier-Villars, Paris 1947, reprint Alain Brioux Paris 1976; Nicola Severino, *Il libro degli Astrolabi. La storia dell'astrolabio da Tolomeo a Regiomontano*, Roccasecca 1994 (testo reperibile on line).

101 H. Michel op. cit. p. 5.

accompagnava lo strumento ne aumentava sicuramente il fascino, anche se probabilmente in Europa non erano in molti a saperlo usare correttamente.

Per limitarci ai punti fondamentali, l'astrolabio¹⁰² è costituito da un **disco metallico**, maneggevole e di **piccole dimensioni**, sui cui sono tracciati i riferimenti essenziali per l'orientamento; poiché si deve seguire il corso del sole, il **centro è il punto di vista dell'osservatore, il sud in alto, l'est a sinistra, l'ovest a destra**. Sul bordo sono incise diverse **scale graduate**, con la **divisione in mesi e giorni**. Sulla superficie è tracciato il **cerchio dell'eclittica** con l'indicazione delle **"case" dello zodiaco**. Questo cerchio è **eccentrico** poiché è **centrato sui poli**; la posizione dipende quindi dalla **latitudine** della località in cui si trova l'osservatore. Ogni astrolabio era costruito in **funzione di una specifica latitudine**; i modelli più perfezionati, costruiti in epoca più recente, permettevano di **sostituire la mappa celeste**, ma naturalmente non era possibile averne una per ogni latitudine, quindi ci si doveva accontentare di una certa approssimazione. Sulla base è montata la **"rete"**, una piccola **mappa delle stelle più note**, formata da **sottili lamine di metallo** che non nascondono le indicazioni che si trovava al di sotto. Su un perno centrale è montata l'**alidada**, una lancetta che permette di mettere in relazione i vari elementi dello strumento in modo da **calcolare**, nelle diverse stagioni, il **segno zodiacale**, la **durata del giorno**, l'**ora astronomica** in relazione all'ora solare, il **sorgere e il tramontare delle principali stelle**. Nei modelli più completi l'alidada è estesa da entrambe le parti del perno, così si può proiettare sulle scale graduate la **posizione opposta a quella del sole**, il suo **nadir**: in questo modo, è possibile calcolare anche l'**ora notturna**. Tenendo lo strumento sospeso davanti agli occhi è possibile usare l'alidada per **misurare l'altezza del sole o di un altro corpo celeste**, naturalmente con "la precisione possibile con uno strumento così piccolo". Per misurare l'altezza del sole non lo si fissa direttamente, ma tendo l'astrolabio all'altezza dello sguardo si regola l'alidada in modo che due piccole sporgenze forate che si trovano alle due estremità proiettino un'**ombra** con al centro un minuscolo punto di luce.



Si trattava quindi di un piccolo ma efficiente **calcolatore analogico**, che permetteva di fare alcune osservazioni astronomiche fondamentali.

L'astrolabio (forse) di Gerberto

Nelle opere sicuramente autentiche di Gerberto **non fa si mai cenno all'astrolabio**. È stato tramandato col nome di Gerberto un testo, che il Bubnov chiama genericamente ***Liber de Astrolabio***¹⁰³, la cui autenticità è messa in dubbio dall'editore, ed è discussa dagli studiosi. L'opera non riscuote grande credito presso gli specialisti; l'autore non dimostra grande dimestichezza con la materia, e sembra ripetere in modo meccanico parti di traduzioni dall'arabo¹⁰⁴.

¹⁰² La figura rappresenta un astrolabio del XV secolo, più elaborato di quelli dell'epoca di Gerberto.

¹⁰³ Gerberti *Opera Mathematica* cit. p. 109.

¹⁰⁴ H. Michel, op. cit.: "Les *Sententiae* [*Astrolabii*: nome usato da alcuni editori] ne sont pas l'œuvre d'un mathématicien, mais plutôt celle d'un curieux de science. Leur auteur s'est contenté de décrire un modèle d'instrument arabe et son emploi. On sent, à travers le texte, qu'il a travaillé sous la dictée, ou avec l'aide d'un arabisant." Severino, op. cit., parlando non solo di questo testo, ma anche di altri autori dell'epoca, dice complessivamente: "...i trattati dell'anno Mille sono molto rudimentali e superficiali nelle descrizioni, e molte volte addirittura inattendibili scientificamente."

Si parla dell'astrolabio anche nella **Geometria "di Autore Incerto"**¹⁰⁵ che abbiamo già visto. Con l'astrolabio si possono effettuare alcuni **rilievi topografici**: l'altezza di edifici, di alberi, la profondità dei pozzi, la larghezza di fiumi e canali ecc. Ma l'autore si limita a presentare semplici **esempi numerici**, senza nessuna regola generale, e quindi non applicabili in condizioni diverse da quelle proposte.

Senza affrontare gli aspetti tecnici dell'esposizione, penso sia utile riportare qui, un po' sfrondata delle ridondanze della prosa "preziosa" dell'epoca, il primo capitolo dell'opera, che è abbastanza esplicativo del contenuto complessivo e delle finalità:

1. Sull'utilità dell'astrolabio

Chi desidera acquisire la conoscenza della disciplina astronomica, e vuole investigare a fondo con diligente ricerca della verità l'**alta scienza delle sfere celesti** e delle **misure geometriche**, e si sforza di avere piena cognizione delle cose certissime degli **orologi** e di tutti i **climi**, e tutto ciò che è pertinente a queste cose, deve studiare e imparare con la massima diligenza questo **Walzagara**¹⁰⁶ cioè la **sfera piana di Tolomeo**¹⁰⁷ ovverosia **astrolabio**, e **mandi a memoria** le cognizioni acquisite, in modo da conoscere perfettamente una per una per nome le iscrizioni che vi sono e le suddivisioni incise in rilievo. Se si abbraccia con diligente attenzione la somma di queste cose e le si affronta con costanza di volontà, si avrà la massima utilità in queste cose una sottile profondità negli studi sia astronomici sia geometrici.

Troverà così ad ogni ora e in tutto il giro della mobile sfera **il sorgere e il tramontare di tutte le stelle**, ed quale **decano** [*gruppo di dieci gradi per ogni segno dello zodiaco*] e quale parte di ciascun segno emerga sorgendo o scompaia tramontando, e nelle diverse regioni del cielo il **movimento delle stelle** e la **posizione dei segni**, e la **posizione del sole** e la sua altezza giorno per giorno e mese per mese, e quale estensione della terra raggiunga, ed analogamente i segni e l'altezza delle stelle fisse; in più **le ore certe del giorno e della notte**, quelle **naturali** [*cioè legate all'illuminazione del sole*] e quelle **artificiali** [*cioè calcolate in misura costante*], con il loro aumentare e diminuire: **questa è una conoscenza necessaria nella celebrazione dei misteri divini**, utili come **esercizio** [*mentale*] e per **combattere i falsi orologi** [*qui intende ovviamente "falsi oroscopi"*]; l'animo prudente è bene che conosca queste cose, perché **l'animo imprudente potrebbe impararle** [*si raccomanda cioè di evitare le false conoscenze degli astrologi*¹⁰⁸]. Si impareranno **gli inizi dei mesi**, e le **varietà degli orologi e dei climi** [*cioè la durata diversa delle ore a seconda della latitudine*]; e molte altre cose per comprendere i **canoni di Tolomeo**, cose che ora è inutile anticipare, poiché verranno spiegate in seguito, e saranno oggetto non solo di gioia, ma soprattutto di meraviglia...

Le indicazioni che seguono sono purtroppo piuttosto sommarie; si tratta probabilmente del **primo testo** di un autore cristiano che descrive l'astrolabio, ma una vera assimilazione in Europa dello strumento e del suo uso richiedeva ancora del tempo.

105 Marta Materni, *La Geometria Gerberti* cit., n. 3.

106 In arabo: **وضعة الكرة** *wad'at al-kurra*, "posizione della sfera". Solomon Gandz, *The Astrolabe in Jewish Literature*, Hebrew Union College Annual, Vol. 4, 1927, p. 476; Boris Andreevič Dorn, *Drei in der Kaiserlichen Öffentlichen Bibliothek zu St. Petersburg befindliche astronomische Instrumente mit arabischen Inschriften*, Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg, VIIe Série t. IX n. 1, 1865, p. 83.

107 All'epoca le opere di Tolomeo non erano conosciute in Europa, la citazione del nome serve solo a dare prestigio allo scritto.

108 Quest'avvertimento non è isolato; Ermanno di Reichenau 1013-1054, detto anche *Hermannus Contractus* ("storpio"), autore di importanti opere teologiche e scientifiche, diceva con decisione: "Per il resto, se queste cose si uniscono alla scienza delle stelle, cioè alla **previsione dei destini**, sono senza dubbio **contrarie alla nostra fede**, e devono essere ignorate, come se non fossero neanche scritte." *Caetera vero, quae se ad cognitionem siderum conjungunt, id est ad notitiam fatorum, fidei nostrae sine dubitatione contraria sunt, et sic ignorari debent, ut nec scripta esse videantur*. Cit. in Bubnov, *Geometria* cit., p. 116 n. 7.

Non parlo qui dell'evoluzione dell'astrolabio tra medioevo e età moderna; al tempo delle prime navigazioni **oceaniche** era ancora l'unico strumento che permetteva una rilevazione, per quanto approssimativa, della **latitudine**; fu poi sostituito dal **quadrante**, più preciso, in cui l'inclinazione dello strumento puntato su un corpo celeste era misurata per mezzo di un filo a piombo che scorreva su una scala graduata; infine dal **sestante**, in cui un sistema di lenti e specchi permetteva rilevazioni decisamente più fini. Per la rilevazione della **longitudine** invece bisogna aspettare l'invenzione di **orologi meccanici** capaci di tenere l'ora esatta anche per settimane o mesi.

L'orientamento delle chiese¹⁰⁹

In questa forse troppo lunga trattazione s'è perso di vista lo scopo originario della ricerca: l'orientamento delle chiese verso più o meno evidenti fenomeni astronomici. Il tema dell'**orientamento degli edifici sacri** è un punto molto presente nella cultura antica e medievale. Mi limito quindi a pochissime citazioni di una letteratura vastissima.

Prima del cristianesimo: Vitruvio e i gromatici

Nella **tradizione romana degli àuguri** l'**est** è la direzione di **buon augurio**, l'ovest quella di cattivo augurio. **Vitruvio**¹¹⁰ dice che normalmente, quando non vi siano altre necessità, le camere da letto e le biblioteche hanno l'**apertura verso oriente**, in modo che vi possa entrare la **luce del mattino**¹¹¹. Addirittura, nelle campagne è verso oriente l'apertura delle **stalle**, in modo che **anche i buoi** possano vedere il sole che sorge¹¹². Ovviamente nei **templi romani** l'altare di fronte alla statua del dio è collocato ad oriente¹¹³. Vengono esaminati vari casi per cui tali principi generali non possono essere osservati, ma non c'è il minimo cenno alla possibilità di individuare **altri punti di riferimento astronomici**.

Il **IX** libro dell'opera vitruviana dà una **panoramica generale delle conoscenze scientifiche del tempo**. L'autore sente il bisogno di accreditarsi non solo come **tecnico**, ma come **uomo di cultura**. Lo spunto iniziale è la **gnomonica**, cioè la tecnica per la determinazione dell'ora attraverso un'**asta (gnomone)** che proiettando un'ombra permette di **misurare la posizione del sole**: materia che l'autore fra rientrare nelle **competenze dell'architetto**. Ma poi il discorso si allarga a diversi temi che riguardano la **matematica** e l'**astronomia**. Naturalmente, mentre sui vari aspetti dell'architettura l'autore ha una competenza specifica approfondita, qui si tratta solo di una **rassegna generica** di vari temi che erano patrimonio condiviso degli uomini di cultura del tempo. È qui che troviamo il tentativo di determinare la **lunghezza della diagonale del quadrato**, di cui s'è parlato poco sopra. Ma non c'è nessun approfondimento specifico.

La questione era importante anche per i **gromatici**¹¹⁴, che progettavano i nuovi insediamenti urbani a partire da due assi, il **cardo** con direzione nord-sud e il **decumanus**

109 Un'ampia sintesi in: Vogel Cyrille & AA, *Sol æquinotialis. Problèmes et technique de l'orientation dans le culte chrétien*. In: Revue des Sciences Religieuses, tome 36, fascicule 3-4, 1962. pp. 175-211.

110 Vedi sopra alla n. 66.

111 *Cubicula et bybliothecae ad orientem spectare debent; usus enim matutinum postulat lumen, item in bybliothecis libri non putrescent*. ib. Vol II, p. 842.

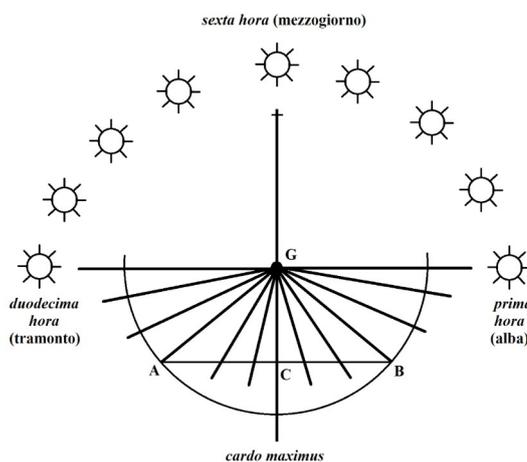
112 ... *agricolae regionem inperiti non putant oportere aliam regionem caeli boves spectare nisi ortum solis*. Ib. Vol. II p. 846.

113 ... *aras omnes deorum necesse esse videatur ad orientem spectare*. Ib. Vol. I p. 386.

114 L'edizione di riferimento è ancora: *Gromatici Veteres*, ex recensione Karoli Lachmanni, Berolini 1848, tradotto in: *Gli antichi agrimensori, Raccolta di opere degli agrimensori romani nella ricognizione di Karl Lachmann*, a cura di Giacinto Libertini, Frattamaggiore 2018. L'opera è consultabile on line.

con direzione est-ovest. Per determinare quei punti di riferimento si usavano diverse tecniche, descritte da **Igino**¹¹⁵ nell'opera *De limitibus constituendis* ("Sulla delimitazione dei confini"). Egli premette che molti agrimensori seguono una procedura sbagliata, poiché prendono come riferimento il punto in cui sorge il sole; ma il sole sorge in **punti diversi** a seconda delle **stagioni** e del **luogo** in cui ci troviamo. Molti sbagliano per trascuratezza, altri alterano l'orientamento per distinguere l'area di loro competenza da aree circostanti dove si è fatta una diversa pianificazione; oppure per ragioni derivanti dalla conformazione del terreno, dalla presenza di strade, di costruzioni importanti ecc.

Per individuare esattamente i punti cardinali, il metodo più semplice è il seguente¹¹⁶. Si pianta uno **gnomone** per terra, con una corda si traccia intorno una **circonferenza**; al mattino si segna il punto in cui **l'ombra della punta dello gnomone tocca la circonferenza**. In seguito il sole si sposta verso destra e si alza, quindi l'ombra si sposterà verso sinistra accorciandosi. Nel pomeriggio, il sole torna a scendere, e quindi l'ombra si allungherà di nuovo. Si segna **il punto in cui l'ombra della punta dello gnomone tocca nuovamente la circonferenza**, si traccia una **linea che unisce i due punti**: quella è la **direttrice est-ovest**¹¹⁷.



L'orientamento in età cristiana

Il tema viene ripreso fin dai primi tempi del cristianesimo, quando le comunità non avevano edifici specifici per il culto, e quindi si riunivano in **case private**. Si parlava dunque non di orientamento delle chiese, ma di **direzione della preghiera**¹¹⁸. Questo principio viene ripreso da numerosi autori, tra cui **Sant'Agostino**, però sempre con l'avvertimento che si tratta di un gesto simbolico, poiché Dio non abita una parte specifica del mondo, ma è **ovunque presente**¹¹⁹.

Con la libertà di culto e la costruzione delle prime chiese fin dal IV secolo la tradizione greca raccomanda di collocare l'ingresso delle chiese verso est¹²⁰, e la **tradizione romana** per parecchio tempo mantiene questa disposizione. Nelle due basiliche principali di Roma, **San Pietro in Vaticano** e **San Giovanni in Laterano**, l'ingresso era

115 Vi sono due autori di nome **Igino** (*Hyginus*); quello che ci interessa ora è indicato convenzionalmente con il n. 2, un personaggio di cui non abbiamo notizie certe. L'opera si trova nell'ed. italiana citata alle pp. 201 sgg. 116 Ib. pp. 230-232.

117 Ho riportato l'ill. a p. 232, ma si tenga presente che guardando verso mezzogiorno il sole sorge a sinistra, tramonta a destra. La figura dovrebbe quindi essere rovesciata.

118 Ἡδη δὲ καὶ περὶ τοῦ κλίματος, εἰς ὃ ἀφορῶντα εὐχεσθαι δεῖ, ὀλίγα λεκτέον. τεσσάρων δὲ ὄντων κλιμάτων, τοῦ τε πρὸς ἄρκτον καὶ μεσημβρίαν καὶ τοῦ πρὸς δύσιν καὶ ἀνατολήν, τίς οὐκ ἂν αὐτόθεν ὁμολογήσαι τὸ πρὸς ἀνατολήν ἐναργῶς ἐμφαίνειν τὸ δεῖν ἐκεῖ νεύοντας συμβολικῶς, ὡς τῆς ψυχῆς ἐνωρώσης τῆ τοῦ ἀληθινοῦ φωτὸς ἀνατολῆς, ποιεῖσθαι τὰς εὐχάς; Origenes, *De oratione*, 32, 1.

119 *Deus ubique praesens est, non locorum spatiis, sed maiestatis potentia. Cuius rei significandae gratia, cum ad orationem stamus, ad orientem convertimur, unde caelum surgit; non tamquam ibi habitet Deus, quasi ceteras mundi partes deseruerit qui ubique praesens est, non locorum spatiis, sed maiestatis potentia; sed ut admoneatur animus ad naturam excellentiorem se convertere, id est ad Deum, cum ipsum corpus eius, quod terrenum est, ad corpus excellentius, id est ad corpus caeleste, convertitur.* Agostino, *De Sermone Domini in Monte Libri II*, PL 34 col. 1277.

120 ... καὶ πρῶτον μὲν ὁ οἶκος ἔστω ἐπιμήκης, κατὰ ἀνατολὰς τετραμμένος ἐξ ἑκατέρω τῶν μερῶν ἔχων τὰ παστοφόρια πρὸς ἀνατολήν, ὅστις ἔοικεν νῆϊ. 57, 3, Didascalia et Constitutiones Apostolorum, edidit Franciscus Xaverius Fumink, Paderbornae 1905, pp. 159-161.

ad est. Nell'**abside**, dunque **ad ovest**, vi era la **cattedra del vescovo**, in questo caso il **papa**, attorniato dai concelebranti; davanti a lui, ad una certa distanza, vi era l'**altare**, costituito all'origine da una **semplice mensa**, senza immagini che ostacolassero la vista (la disposizione e l'arredo dell'altare sono cambiati più volte in età antica e medievale). Al momento della consacrazione, il vescovo si alzava in piedi, pronunciava la benedizione, poi si accostava all'altare, con **lo sguardo sempre rivolto verso oriente**.

Questa disposizione poneva però una difficoltà, in quanto i fedeli, guardando verso il vescovo, volgevano le spalle all'oriente, e questo poteva sembrare in contraddizione con il principio più volte ripetuto, di pregare "rivolti verso il signore", cioè verso oriente. Solo in un secondo tempo si diffonde una **nuova disposizione**, che nel nord Europa si generalizza, ma a Roma coesiste con la tradizione precedente, a volte attraverso un **rovesciamento della disposizione interna delle chiese**. In questa nuova situazione il popolo è sempre rivolto verso oriente, e tocca all'officiante, che celebra *facie ad faciem*, cioè dietro la mensa dell'altare rivolto verso il popolo, rivolgersi verso il fondo della chiesa¹²¹. Questo a lungo andare porterà ad una **nuova disposizione** interna della chiesa: **l'altare viene spostato verso il fondo dell'abside, la cattedra del vescovo è collocata di fianco, infine l'officiante celebrerà all'altare voltando le spalle ai fedeli**¹²².

La dottrina richiama più volte queste disposizioni, ma raccomandando **una certa cautela** per evitare di dare un messaggio sbagliato. Per **Papa Leone Magno** l'abitudine di **rivolgersi verso oriente e inchinarsi** prima di entrare nella basilica di **san Pietro** è pericolosa perché può nascondere la **sopravvivenza di antiche concezioni pagane**¹²³.

In tutte queste indicazioni per "**oriente**" si intende sempre il "**sole equinoziale**", cioè l'est vero, anche se si rileva che spesso, o per trascuratezza, o per altre necessità, l'orientazione può essere diversa. Tale direzione veniva individuata utilizzando le tecniche degli antichi agrimensori. Secondo l'interpretazione simbolica di **Guglielmo Durando**, la direzione verso il punto equinoziale, quindi **intermedia fra i due solstizi**, rappresenta la **temperanza** praticata dalla Chiesa, che è la ricerca del "**giusto mezzo**" fra gli estremi¹²⁴.

In nessun caso si prendono in considerazione, neppure per ipotesi, altre direzioni astronomiche. Non sto a parlare di altri temi che hanno dato spunto a questo studio, come il "poligono di Dio" ecc., di cui non ho trovato traccia in questa ricerca.

121 *Porro licet Deus sit ubique, tamen sacerdos in altari, et in divinis officiis, debet ex institutione Vigiliæ Papæ (ca. 500-555) versus orientem orare. Unde in Ecclesiis ostium ab occidente habentibus, Missam celebrans, in salutatione ad populum se vertit, quia quos salutamus facie ad faciem præsentamus... et deinde oraturus, se ad orientem convertit. In Ecclesiis vero ostia ab oriente habentibus, ut Romæ, nulla est in salutatione necessarii conversio, sacerdos in illis celebrans semper ad populum stat conversus.* Guglielmo Durando, *Rationale Divinorum Officiorum*, Napoli 1859, p. 340.

122 C. Vogel e AA, *Sol æquinocialis* cit. p. 196.

123 *De talibus institutis etiam illa generatur impietas, ut sol in inchoatione diurnæ lucis exurgens a quibusdam insipientioribus de locis eminentioribus adoretur; quod nonnulli etiam Christiani adeo se religiose facere putant, ut, priusquam ad B. Petri apostoli basilicam, quæ uni Deo vivo et vero est dedicata, perveniant, superatis gradibus quibus ad suggestum aræ superioris ascenditur, converso corpore ad nascentem se solem reflectant, et curvatis cervicibus, in honorem se splendidi orbis inclinent. Quod fieri partim ignorantie vitio, partim paganitatis spiritu, multum tabescimus et dolemus: quia etsi quidam forte Creatorem potius pulchri luminis quam ipsum lumen, quod est creatura, venerantur, abstinendum tamen est ab ipsa specie hujus officii, quam cum in nostris invenit, qui deorum cultum reliquit, nonne hanc secum partem opinionis vetustæ tamquam probabilem retentabit, quam Christianis et impiis viderit esse communem?* Papa Leone Magno, *Sermo in Nativitate Domini VII*, PL 54 coll. 218-219.

124 *Debet quoque [Ecclesia] sic fundari, ut caput recte inspiciat versus orientem... videlicet versus ortum solis equinoctialem, ad denotandum quod Ecclesia quæ in terris militat, temperare se debet æquanimitè in prosperis, et in adversis, et non versus solsticialem, ut faciunt quidam.* Durando, *Rationale* cit., p. 13.

Conclusione

Per comprendere appieno l'opera di Gerberto e dei suoi contemporanei, senza antistoriche svalutazioni, occorre vederli nel **contesto dell'epoca in cui operarono**. Valgono a questo punto le parole dell'editore moderno di Boezio:

Medieval Sciences have traditionally been judged against their Greek or Arabic sources and have generally been found wanting. It is hardly a new claim that these scientific and mathematical works should be evaluated not by Greek or modern standards but in terms of the complex of medieval culture... Boethius should be studied in terms of those who read his works in the Middle Ages, that is, he should be known by historians of culture and in the total context of medieval ideas.¹²⁵

A conclusione di questo breve *escursus* voglio riportare una **Lettera** di Gerberto al monaco Rainardo (settembre 988), che riflette l'**avventura umana** dello studioso, preso dai complessi equilibri e conflitti del tempo, e la passione per la scienza e per i libri¹²⁶:

Non pensare, dolcissimo fratello, che accada per mio difetto che io sia tanto lungo privo della presenza dei miei fratelli. Dopo che mi sono dipartito da te **ho perseguito con frequenti viaggi la causa del mio padre Colombano**¹²⁷ secondo le mie forze.

L'ambizione dei regni, i tempi crudeli e miserandi hanno convertito il giusto nell'ingiusto. La propria fedeltà non è ripagata secondo alcuna giustizia. Io tuttavia, sapendo che tutto dipende dalla decisione di Dio, che cambia insieme i cuori e i regni dei figli degli uomini, aspetto pazientemente l'esito degli avvenimenti. E ti consiglio ed esorto, fratello, a fare lo stesso. Frattanto ti richiedo moltissimo una sola cosa, che si può fare senza pericolo e senza danno per te e può legarmi massimamente a te in amicizia. **Tu sai con quanto impegno io ricerchi ovunque esemplari di libri.** Tu sai quanti copisti si trovino ovunque nelle città e nelle campagne d'Italia. Agisci dunque e, sapendolo tu solo fa **che siano copiati per me a tue spese** Manlio sull'astrologia¹²⁸, Vittorino sulla retorica¹²⁹, l'oftalmico di Demostene¹³⁰. Io ti prometto, fratello, e tienilo per certo, che terrò sotto sacro silenzio questo fedele servizio e questa lodevole obbedienza, e t'invierò pienamente qualunque cosa tu mi avrai richiesto secondo i tuoi scritti, e in qualunque tempo ordinerai. Soltanto indica a chi dobbiamo consegnare i tuoi doni e i nostri scritti, e rallegraci più frequentemente con le tue lettere, e non aver paura che giunga notizia a chicchessia di ciò che avrai posto sotto la nostra fiducia...¹³¹

Castelnuovo don Bosco, 12 ottobre 2024
Ricorrenza della scoperta dell'America

In copertina: Illustrazione dalla Margarita Philosophica di Gregor Reisch, stampata a Strasburgo nel 1503. Sono rappresentati, per la matematica antica, Pitagora, per la matematica "moderna", Boezio, che a quell'epoca evidentemente aveva ancora corso nelle scuole. Con notevole anacronismo, Pitagora maneggia una specie di abaco, mentre Boezio usa già i numeri arabi. Sull'abito dell'Aritmetica si vedono le due serie 1 - 2 - 4 - 8 e 1 - 3 - 9 - 27, cioè la successione dei multipli di 2 e di 3, che compaiono in molte formule pitagoriche, tra cui il "triangolo" delle proporzioni geometriche di p. 8.

125 Boethian Number Theory... by Michael Masi cit., p. 9.

126 Ernesto Dezza, *Gerberto d'Aurillac e la ricerca dei libri*, Antonianum XCVIII (2023) pp. 833-848.

127 Il monastero di Bobbio era stato fondato fondato nel 614 da San Colombano; Gerberto ne fu abate dal 982 al 999, quando divenne papa. Per tutto quel periodo fu tormentato da difficoltà amministrative, e dai conflitti con i poterli laici locali che usurpavano i beni del cenobio.

128 Gli *Astronomica* sono un poema didascalico, composto intorno al 30-40 da un certo Marco Manlio di cui non sappiamo quasi nulla.

129 *Commento alla retorica di Cicerone* di Caio Mario Vittorino, 1ª metà del IV secolo, africano di nascita.

130 Demostene Filalete, della scuola medica di Alessandria (I sec. a.C.).

131 Trad. in: Paolo Rossi, *Gerbert d'Aurillac (Silvestro II), Lettere (983-997)*, Pisa 2009, p. 99.